ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝ.ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μάθημα : «Φιλοσοφία των Μαθηματικών»

¶ ¶

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

¶ ¶

Διδάσκων : Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος

ΕΡΓΑΣΙΑ : Μετάφραση – Σχόλια στο ιστορικό άρθρο του

David Hilbert, *«ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ»(On the infinite)*

Μεταπτυχιακός φοιτητής : Ιωάννης Π. Πλατάρος

Αριθμός μητρώου: 211.502

ΑΘΗΝΑ , Φεβρουάριος 2002



David Hilbert

0. Πίνακας Περιεχομένων

1 . Περιληπτικό Βιογραφικό[1]

Ο David Hilbert γεννήθηκε στο Kõnigsberg της Πρωσίας τον Ιανουάριο του 1862(εκεί γεννήθηκε κι ο Kant) και φοίτησε τόσο στο γυμνάσιο όσο και στο πανεπιστήμιο της περιοχής. Το 1884, εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή και, δύο χρόνια αργότερα, αναγορεύτηκε καθηγητής του ίδιου πανεπιστημίου. Στη συνέχεια, κλήθηκε στο πανεπιστήμιο του Gõttigen, όπου και διατήρησε την έδρα του μέχρι το τέλος της καριέρας του, το 1930.

Ο Hilbert απέκτησε γρήγορα ιδιαίτερα μεγάλη φήμη, αφού απέδειξε με καινοφανείς και μεγαλοφυείς μεθόδους το γενικό θεώρημα που καθορίζει το περατό της βάσης στο σύστημα των αμετάβλητων και των συμμεταβλητών ενός αλγεβρικού τύπου, με οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών. Το πρώτο του έργο, με τίτλο “Zhalbericht”, παρέμεινε επί 40 χρόνια στην κορυφή του τομέα της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών, όμως ως γνωστότερο και σημαντικότερο έργο του θεωρείται το βιβλίο “Βάσεις της Γεωμετρίας” που κυκλοφόρησε το 1899.

Σε αυτό, ο Hilbert προσπάθησε να συμβιβάσει τα “στοιχεία” του Ευκλείδη, με τις αυστηρά αμετάβλητες βάσεις που απαιτεί η κλασική γεωμετρία, προκαλώντας έντονες συζητήσεις και σημειώνοντας τη γέννηση της γενικής τοπολογίας. Σημαντικότατη, ήταν η συμβολή του

στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων, που δημιούργησε ο Fredholm, ενώ σε αυτόν οφείλεται, επίσης, η πρώτη γενική απόδειξη της περίφημης υπόθεσης του E. Waring, σχετικά με τη δυνατότητα να εκφραστεί κάθε ακέραιος αριθμός ως άθροισμα δυνάμεων ακέραιων αριθμών.

Με το έργο του αυτό , ο Hilbert συνέβαλε στην εξέλιξη της μαθηματικής φυσικής, της κινητικής θεωρίας των αερίων και της θεωρίας της σχετικότητας. Σπουδαιότατη θεωρείται, επιπλέον, η φιλοσοφική πλευρά των μελετών του περί μαθηματικής λογικής. Έτσι, ο επιστήμονας αυτός άσκησε τεράστια επίδραση στα μαθηματικά της εποχής του, όμως η επικράτηση του χιτλερισμού έθεσε τέλος στο έργο του.

Πέθανε στο Kõnigsberg το 1943.

2 . Εισαγωγικές παρατηρήσεις για την μετάφραση του κειμένου και τα σχόλια

Για την απόδοση του παρακάτω κειμένου από τα Αγγλικά , ακολουθήσαμε και λάβαμε σχεδόν πιστά το ερμηνευτικό πνεύμα της αντίστοιχης μετάφρασης του κ. Παύλου Χριστοδουλίδη που έχει ανθολογήσει το κείμενο του Hilbert στο βιβλίο του «Φιλοσοφία των Μαθηματικών» (Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού –Αθήνα 1993). Επίσης λάβαμε υπ΄όψιν και την μετάφραση του κ.Μ. Κωνσταντινίδη , μόνο σε ό,τι αφορά την απόδοση κάποιων ελαχίστων(δύο ή τριών) λέξεων – ορολογιών , όπως «άρρητος» αντί «μη ρητός» ή «ολοκληρωτική εξίσωση» αντί «ολοκληρωματική εξίσωση» Κατά βάσιν όμως, έχει

---

[1] **ΗΜΕΡΗΣΙΑ / ΠΡΙΣΜΑ**, τεύχος **44**, 8-9 Φεβρουαρίου 2000

ακολουθηθεί η ερμηνευτική άποψη του κ. Χριστοδουλίδη.

Κατά όσον αφορά τα σχόλια επί του κειμένου , παραθέτουμε Μια διάλεξη του Αμερικανού πανεπιστημιακού Timothy Eyre , (http://www.users.waitrose.com/~timothyeyre/index.html) κάποιες ερμηνευτικές απόψεις του κ. Γ. Ρουσόπουλου («Μαθηματικός Ρεαλισμός» Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα –Αθήνα 1999) πάνω στο άπειρο αλλά και σε κάποιες συνέπειες που έχει το άπειρο στις περατοκρατικές αντιλήψεις του Hilbert , καθώς και του περιφήμου προγράμματός του.

Επίσης παραθέτουμε και σχετικά σχόλια από το σύγγραμμα του κ. Διονυσίου.Α. Αναπολιτάνου «Φιλοσοφία των Μαθηματικών» Εκδόσεις Νεφέλη –Αθήνα 1985.

3. *Για το Άπειρο*[2]

Με τις οξυδερκή κριτική του ο Weierstrass πρόσφερε στην κλασική μαθηματική ανάλυση ένα στερεό θεμέλιο. Με το να διασαφηνίσει πολλές έννοιες, ιδιαίτερα τις έννοιες του ελάχιστου, της συνάρτησης και της παραγώγου, απάλειψε τις ατέλειες που ακόμα υπήρχαν στον απειροστικό λογισμό, τον αποκάθαρε από όλες τις ασαφείς ιδέες σχετικά με το απειροστό[3] και αναμφισβήτητα ξεπέρασε τις δυσκολίες που

---

[2](Σημείωση του πρωτοτύπου κειμένου)Η διάλεξη ~Ueber das Uiiendliche' του Hilbert διαβάστηκε στις4 Ιουνίου 1925 σε μία συγκέντρωση που οργάνωσε η Μαθηματική Εταιρεία της Βεστφαλίας για να τιμήσει τη μνήμη του Weierstrass . Μεταφράστηκε από την Erna Putnam και Gerlad J. Massey από "mathematishe Annalen (Βερολίνο) κεφ.95 σελ.161-90 . Το δικαίωμα και η αποκλειστικότητα για την μετάφραση του άρθρου είναι μια ευγενική χορηγία από τους εκδότες Spinger Verlag

[3] Για παράδειγμα, υπήρχε σύγχυση με τα απειροστά του Libnitz όπου η παράγωγος της συνάρτησης $y = x^2$, αντιμετωπίζετο από τον εφευρέτη του απειροστικού λογισμού με τον εξής τρόπο:

$y+Dy=(x+Dx)^2 \Rightarrow y+Dy=x^2+2xDx+(Dx)^2 \Rightarrow Dy=2xDx+(Dx)^2 \Rightarrow$

$\frac{Dy}{Dx} = 2x + Dx \Rightarrow (Dx \cong 0)\ \frac{Dy}{Dx} = 2x$ Δηλαδή το Dx είχε ιδιότητες του μηδενός , αλλά και

πήγαζαν από την έννοια του απειροστού. Αν σήμερα στη μαθηματική ανάλυση υπάρχει πλήρης συμφωνία και βεβαιότητα, όταν χρησιμοποιούνται συμπερασματικές μέθοδοι που βασίζονται στις έννοιες του αρρήτου αριθμού και της έννοιας του ορίου γενικά, και αν υπάρχει ομοφωνία πάνω σε όλα τα αποτελέσματα που αφορούν τα πιο πολύπλοκα ζητήματα της θεωρίας των διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, μολονότι χρησιμοποιούνται οι πιο τολμηροί και ποικίλοι συνδυασμοί σύνθεσης, παράθεσης και εγκιβωτισμού ορίων, όλα αυτά ουσιαστικά οφείλονται στην επιστημονική δραστηριότητα του Weierstrass.

Και όμως, μολονότι ο Weierstrass θεμελίωσε τον απειροστικό λογισμό, δεν σταμάτησαν οι συζητήσεις για τη θεμελίωση της ανάλυσης.

Αυτό συμβαίνει επειδή ποτέ δεν αποσαφηνίστηκε/ διευκρινίσθηκε εντελώς το νόημα του άπειρου στα μαθηματικά. Ασφαλώς η ανάλυση του Weierstrass απέβαλε το άπειρα μικρό και το άπειρα μεγάλο, με το να αναγάγει τις προτάσεις που αναφέρονται σ' αυτά σε προτάσεις που μιλούν για σχέσεις πεπερασμένων μεγεθών. Ωστόσο το άπειρο δεν παύει να παρουσιάζεται στην άπειρη αριθμητική ακολουθία που ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς και στην έννοια του συστήματος των πραγματικών αριθμών, το οποίο θεωρείται ότι αποτελεί μία εν ενεργεία ολότητα πλήρη και κλειστή .

Στη θεμελίωση της ανάλυσης ο Weierstrass όχι μόνο δέχεται ανεπιφύλακτα, αλλά και χρησιμοποιεί επανειλημμένα τις μορφές του λογικού συμπερασμού στις οποίες παρεμβαίνει αυτή η αντίληψη του απείρου, όπως εκείνες που χρησιμοποιούμε όταν, λ.χ., Θεωρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν μία ορισμένη ιδιότητα ή υποστηρίζουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που έχουν μία ιδιότητα.

δεν είχε, αφού ετίθετο κι ως παρονομαστής. Περί αυτού ο Berkeley επέκρινε τον Libnitz (βλέπε «Εισαγωγή στην Ιστορία των Μαθηματικών» Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου Εκδόσεις Νεφέλη σελ.116)

Ώστε το άπειρο κατάφερε, μεταμφιεσμένο, να τρυπώσει ξανά στη θεωρία του Weierstrass και να ξεφύγει τον αυστηρό έλεγχο της κριτικής του. Χρειάζεται λοιπόν να λυθεί μια για πάντα το πρόβλημα του απείρου όπως διατυπώθηκε πιο πάνω -στην προηγούμενη παράγραφο-. και όπως στις διαδικασίες περάσματος στο όριο, που χαρακτηρίζουν τον απειροστικό

λογισμό, το , με τη σημασία του άπειρα μικρού και του άπειρα μεγάλου, αποκαλύφθηκε ότι είναι μόνο τρόπος του λέγειν, έτσι ακριβώς, πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι, όταν στις μεθόδους συμπερασμού συναντάμε το άπειρο με τη σημασία της άπειρης ολότητας, αυτό είναι μονάχα φαινομενικό. Και ακριβώς όπως οι πράξεις με το άπειρα μικρό αντικαταστάθηκαν με πεπερασμένες διαδικασίες που οδηγούν στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα και τις ίδιες κομψές τυπικές σχέσεις, έτσι πρέπει γενικά οι μέθοδοι λογικής παραγωγής που βασίζονται στο άπειρο να αντικατασταθούν από πεπερασμένες διαδικασίες που να οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα, οι οποίες δηλ. να καθιστούν δυνατές τις ίδιες αλυσίδες αποδείξεων και τη χρήση των ίδιων μεθόδων για την ανεύρεση τύπων και θεωρημάτων.

Σ αυτό αποβλέπει η θεωρία μου. Σκοπός της είναι να εξασφαλίσει στη μαθηματική μέθοδο την οριστική βεβαιότητα η οποία δεν επετεύχθη ούτε κατά την κριτική περίοδο του απειροστικού λογισμού. Έτσι θα ολοκληρώσει αυτό που ο Weierstrass ήλπιζε να πετύχει με τη θεμελίωση της ανάλυσης και προς το οποίο έκανε ένα αναγκαίο και ουσιαστικό βήμα.

Για να διασαφηνίσουμε όμως την έννοια του απείρου, πρέπει να υιοθετήσουμε μια γενικότερη προοπτική. Ο προσεκτικός αναγνώστης θα βρει ότι τα μαθηματικά γραπτά είναι γεμάτα από ανοησίες και παραλογισμούς που συνήθως πηγάζουν από το άπειρο. Έτσι, λ.χ., μερικοί υποστηρίζουν, εν είδει περιοριστικής συνθήκης, ότι στα αυστηρά μαθηματικά επιτρέπονται μόνο αποδείξεις με έναν πεπερασμένο αριθμό

συμπερασμών — σαν να είχε ποτέ κανείς καταφέρει να κάνει αποδείξεις με έναν άπειρο αριθμό συνεπαγωγών!

Ακόμα και παλαιές αντιρρήσεις, που θα πίστευε κανείς πως έχουν εγκαταλειφθεί από καιρό, ξαναπαρουσιάζονται με διαφορετική μορφή. Λόγου χάρη, τον τελευταίο καιρό συναντά κανείς δηλώσεις όπως τούτη: ακόμα κι αν είναι. δυνατόν να εισαγάγουμε μία έννοια χωρίς κίνδυνο (δηλ. χωρίς να γεννιούνται αντιφάσεις) και αν, επιπλέον μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εισαγωγή της δεν προκαλεί. αντιφάσεις, μολονότι τούτο δεν είναι αιτιολογημένη η εισαγωγή της έννοιας αυτής. Μήπως η αντίρρηση αυτή δεν είναι ακριβώς η ίδια με την παλαιότερη αντίρρηση για τους μιγαδικούς αριθμούς, όταν έλεγαν: «Ασφαλώς η χρήση τους δεν οδηγεί σε αντιφάσεις· ωστόσο η εισαγωγή τους δεν είναι αιτιολογημένη γιατί, στο κάτω-κάτω , δεν υπάρχουν φανταστικά μεγέθη»; Αν έχει νόημα να θέσουμε το ερώτημα της αιτιολόγησης ενός μέτρου ανεξάρτητα από την απόδειξη ότι δεν οδηγεί σε αντίφαση, τότε αυτή η αιτιολόγηση δεν μπορεί να σημαίνει παρά μόνο ότι αυτό το μέτρο είναι επιτυχές. Πράγματι η επιτυχία είναι απαραίτητη, γιατί
στα μαθηματικά, όπως και αλλού, αυτή αποτελεί το ανώτατο δικαστήριο μπροστά στο οποίο όλοι. υποκλίνονται.

Όπως μερικοί βλέπουν φαντάσματα, έτσι ένας άλλος συγγραφέας φαίνεται. πως βλέπει αντιφάσεις ακόμα και εκεί που κανείς δεν βεβαίωσε τίποτε, θέλω να πω στον συγκεκριμένο κόσμο της αισθητηριακής αντίληψης, και θεωρεί ότι η «συνεπής λειτουργία» του αποτελεί μία ειδική παραδοχή. Εγώ, πάντως, πιστεύω ότι μόνο οι δηλώσεις και οι παραδοχές , στο βαθμό που οδηγούν σε δηλώσεις διαμέσου συμπερασμών, μπορούν να είναι αντιφατικές μεταξύ τους. Η άποψη, σύμφωνα με την οποία τα γεγονότα και τα συμβάντα μπορούν επίσης να είναι αντιφατικά, αποτελεί κατά τη γνώμη μου το τέλειο παράδειγμα του παραλογισμού.

Με τις παρατηρήσεις μου ήθελα μόνο να δείξω ότι η οριστική διασάφηση της φύσης Του απείρου δεν αφορά μονάχα τη σφαίρα των ειδικών ενδιαφερόντων των επιστημών, αλλά ότι είναι απαραίτητη για την τιμή της ίδιας *της* ανθρώπινης νόησης

Ανέκαθεν το άπειρο διήγειρε την ανθρώπινη ψυχή περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Εν τούτοις καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται διασάφηση όσο αυτή.

Προτού καταπιαστούμε μ' αυτό το έργο, δηλ. με το να διασαφηνίσουμε τη φύση του απείρου, πρέπει να εξετάσουμε, έστω και πολύ συνοπτικά, ποια είναι το περιεχόμενο που πραγματικά αποδίδεται σ' αυτή την έννοια. Ας δούμε πρώτα τι μπορεί να μας διδάξει η Φυσική.

Η αρχική, αφελής εντύπωσή μας για τα φυσικά συμβάντα και την ύλη είναι η εντύπωση της σταθερότητας, της συνέχειας. Αν θεωρήσουμε ένα κομμάτι μέταλλο ή έναν ορισμένο υγρό όγκο, έχουμε την εντύπωση ότι αυτά μπορούν να διαιρεθούν επ' άπειρον, ότι τα ελάχιστα μέρη τους παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες που παρουσιάζει το όλον. Αλλά εκεί όπου τελειοποιήθηκαν αρκετά οι ερευνητικές μέθοδοι της Φυσικής της ύλης, Οι επιστήμονες ανακάλυψαν όρια διαιρετότητας, που δεν οφείλονται στις ατέλειες των πειραμάτων μας, αλλά στην ίδια τη φύση των πραγμάτων. Γι' αυτό και θα μπορούσαμε να πούμε ότι η σύγχρονη επιστήμη τείνει να χειραφετηθεί από το άπειρα μικρό και ότι στη θέση της παλαιάς αρχής «η φύση δεν κάνει άλματα» θα μπορούσαμε τώρα να βεβαιώσουμε το αντίθετο, δηλ. ότι «η φύση κάνει άλματα».

Είναι σ' όλους γνωστό ότι η ύλη συντίθεται από μικροσκοπικούς οικοδομικούς πλίνθους που λέγονται «άτομα»· όταν συνδυασθούν και συνδεθούν, αυτά παράγουν όλη την ποικιλία των μακροσκοπικών αντικειμένων.

Αλλά η Φυσική δεν στάθηκε στον ατομισμό της ύλης. Στο τέλος του περασμένου αιώνα εμφανίσθηκε ο ατομισμός του ηλεκτρισμού, κάτι που εκ πρώτης όψεως φαίνεται πολύ παράξενο. Ο ηλεκτρισμός που ως τότε κατατασσόταν στα ρευστά και αποτελούσε το κατ' εξοχήν υπόδειγμα του συνεχούς ενεργού παράγοντα, αποκαλύφθηκε ότι συνίσταται από σωμάτια, τα θετικά και τα αρνητικά ηλεκτρόνια[4].

Εκτός από την ύλη και τον ηλεκτρισμό, στη Φυσική υπάρχει ακόμα μία οντότητα για την οποία ισχύει ο νόμος της διατήρησης, η ενέργεια. Αλλά τώρα αποδεικνύεται ότι ούτε και η ενέργεια επιδέχεται μια απλή και άνευ όρων άπειρη διαιρετότητα. Ο Planck ανακάλυψε τα κβάντα ενεργείας.

Το τελικό αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι ότι σε κανένα τομέα της πραγματικότητας δεν βρίσκουμε ένα ομοιογενές συνεχές που να επιτρέπει το είδος εκείνο της διαιρετότητας η οποία είναι απαραίτητη ώστε να πραγματοποιείται το άπειρα μικρό. Η άπειρη διαιρετότητα ενός συνεχούς είναι μία πράξη που υπάρχει μόνο στη σκέψη. Είναι μόνο μία ιδέα που ανασκευάζεται από τις φυσικές παρατηρήσεις μας και από τα πειράματα της Φυσικής και της Χημείας.

Συναντάμε το ζήτημα του φυσικού απείρου, όταν εξετάζουμε το σύμπαν ως ολότητα. Εδώ πρέπει να ερευνήσουμε την απέραντη έκταση του σύμπαντος, για να προσδιορίσουμε αν σ' αυτό υπάρχει κάτι το άπειρα μεγάλο.

Επί πολύ καιρό επικρατούσε η άποψη ότι ο κόσμος είναι άπειρος ως την εποχή του Kant, και ακόμα μετά τον Kant, κανένας δεν αμφέβαλε ότι ο χώρος είναι άπειρος. Και εδώ, όμως, η σύγχρονη επιστήμη, ειδικά η αστρονομία, θέτει ξανά το ερώτημα και προσπαθεί να δώσει μία απάντηση, όχι με τα ανεπαρκή μέσα της μεταφυσικής θεώρησης, αλλά με λόγους που να στηρίζονται στην εμπειρία και στην εφαρμογή των

[4] Προφανώς πρέπει να εννοεί ο Hilbert τα αρνητικά ηλεκτρόνια και τις θετικές οπές που εξηγούν την ροή του ηλεκτρισμού. Με τον όρο «θετικά ηλεκτρόνια» δεν φαίνεται να εννοεί τα ποζιτρόνια μιας και

φυσικών νόμων. Και στην περίπτωση αυτή παρουσιάστηκαν σοβαρές αντιρρήσεις στο άπειρο. Η Ευκλείδεια γεωμετρία κατ' ανάγκην οδηγεί στο αίτημα, σύμφωνα με το οποίο ο χώρος είναι άπειρος. Η Ευκλείδεια γεωμετρία αυτή καθ' εαυτή είναι μη αντιφατική ως οικοδόμημα και ως εννοιολογικό σύστημα , ωστόσο, όμως, αυτό δεν σημαίνει ότι στην πραγματικότητα ο χώρος είναι Ευκλείδειος. Μόνο η παρατήρηση και το πείραμα μπορούν να αποφασίσουν αν ο χώρος είναι ή δεν είναι Ευκλείδειος. Η προσπάθεια να αποδειχθεί με καθαρά θεωρητικά μέσα ότι ο χώρος είναι άπειρος περιέχει χοντρά λάθη. Από το γεγονός ότι πέρα από μία περιοχή του χώρου υπάρχει πάντα μία άλλη περιοχή του, μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ότι ο χώρος είναι απεριόριστος, όχι ότι είναι άπειρος. Το απεριόριστο και το πεπερασμένο δεν είναι ασυμβίβαστα. Με τη λεγόμενη ελλειπτική γεωμετρία η μαθηματική έρευνα μας δίνει το φυσικό μοντέλο ενός πεπερασμένου κόσμου. Σήμερα η εγκατάλειψη της Ευκλείδειας γεωμετρίας δεν είναι πια απλό αποτέλεσμα μαθηματικής ή φιλοσοφικής θεώρησης· αντίθετα. την εγκαταλείψαμε για λόγους που αρχικά δεν είχαν καμία σχέση με το ζήτημα του πεπερασμένου του σύμπαντος. Ο Einstein έδειξε ότι πρέπει να εγκαταλείψουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία. Ξεκινώντας από τη βαρυτική θεωρία του ο Einstein καταπιάνεται με το κοσμολογικό πρόβλημα και δείχνει ότι είναι δυνατός ένας πεπερασμένος κόσμος και ότι, επιπλέον, όλα τα αποτελέσματα της αστρονομίας συμβιβάζονται με την υπόθεση ενός ελλειπτικού σύμπαντος.

Αποδείξαμε ότι η πραγματικότητα είναι πεπερασμένη προς δύο κατευθύνσεις, δηλ. όσον αφορά το άπειρα μικρό και το άπειρα μεγάλο. Ωστόσο μπορεί κάλλιστα να συμβαίνει το άπειρο να έχει μία εντελώς δικαιολογημένη θέση στη σκέψη μας και να παίζει το ρόλο μιας απαραίτητης έννοιας. Ας δούμε πώς παρουσιάζονται τα πράγματα στα

δεν μετέχουν στην ηλεκτρική ροή μέσα σε έναν αγωγό .

μαθηματικά. Και πρώτα απ’ όλα ας εξετάσουμε το καθαρότερο και απλούστερο προϊόν του ανθρώπινου πνεύματος, τη Θεωρία των αριθμών. Από την πλούσια ποικιλία των στοιχειωδών τύπων, ας διαλέξουμε έναν τύπο, λ.χ. τον τύπο

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε το n με οποιονδήποτε αριθμό, ας πούμε τον 2 ή τον 5, αυτός ο τύπος περιέχει έναν άπειρο αριθμό προτάσεων. Αυτά είναι το ουσιαστικό χαρακτηριστικό που του επιτρέπει να παριστά τη λύση ενός αριθμητικού προβλήματος και να απαιτεί μία αποδεικτική σκέψη, ενώ οι μεμονωμένες αριθμητικές εξισώσεις

$$1^2 + 2^3 = \frac{1}{6}.2.3.5$$

ή

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6}.5.6.11$$

μπορούν να επαληθευτούν με απλό συλλογισμό και επομένως ως μεμονωμένες , δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Συναντάμε μία εντελώς διαφορετική, μοναδική και θεμελιακή αντίληψη της έννοιας του απείρου, στην εξαιρετικά σημαντική και γόνιμη μέθοδο των ιδεατών στοιχείων. Η μέθοδος χρησιμοποιείται ακόμα και στη στοιχειώδη γεωμετρία του επιπέδου. Αρχικά, τα σημεία και οι ευθείες του επιπέδου είναι τα μόνα αντικείμενα που υπάρχουν πραγματικά. Αυτά, ανάμεσα στα άλλα αξιώματα, ικανοποιούν και το αξίωμα της σύνδεσης: Από δύο σημεία περνά μία και μόνη ευθεία. Από

το αξίωμα τούτο απορρέει ότι δύο ευθείες τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. Δεν υπάρχει όμως θεώρημα που να λέει ότι δύο ευθείες γραμμές τέμνονται πάντοτε σε ένα σημείο, γιατί μπορούν κάλλιστα να είναι παράλληλες. Είναι όμως γνωστό ότι με την εισαγωγή ιδεατών στοιχείων, δηλ. σημείων στο άπειρο και ευθειών στο άπειρο, μπορούμε να μετατρέψουμε την πρόταση ότι δύο ευθείες έχουν πάντοτε ένα και μόνο ένα κοινό σημείο σε καθολικά έγκυρη πρόταση.

Τα ιδεατά στοιχεία «στο άπειρο» παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι καθιστούν το σύστημα των νόμων σύνδεσης όσο πιο απλό και ευσύνοπτο. Επιπλέον η συμμετρία ανάμεσα στο σημείο και στην ευθεία , μας δίνει την γόνιμη αρχή του Γεωμετρικού δυϊσμού.

Άλλο παράδειγμα χρήσης ιδεατών στοιχείων αποτελούν τα γνωστά σύνθετα -φανταστικά μεγέθη της άλγεβρας. Η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι απλουστεύουν τα θεωρήματα που αφορούν την ύπαρξη και τον αριθμό των ριζών μιας εξίσωσης.

Στη γεωμετρία, για να ορίσουμε ένα ιδεατό σημείο χρησιμοποιούμε τις άπειρες ευθείες, δηλ. τις ευθείες που είναι παράλληλες μεταξύ τους. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, στην ανώτερη αριθμητική, για να ορίσουμε έναν ιδεατό αριθμό, χρησιμοποιούμε ορισμένα συστήματα με άπειρα μέλη - αριθμούς. Και από όλες της αρχές της εφαρμογής των ιδεατών στοιχείων, ασφαλώς αυτή είναι η πιο μεγαλοφυής. Όταν εφαρμόσουμε την διαδικασία αυτή συστηματικά σε ένα σώμα, ξαναβρίσκουμε σε αυτό τους απλούς και γνωστούς νόμους της διαιρετότητας, που ισχύουν και για τους κοινούς ακεραίους 1, 2, 3, 4,... Στο σημείο αυτό έχουμε κιόλας μπει στην περιοχή της ανώτερης αριθμητικής.

Ερχόμαστε τώρα στην Ανάλυση, την πιο καλλιτεχνική και καλοδουλεμένη μαθηματική δομή. Γνωρίζετε πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος του απείρου στην Ανάλυση. Κατά κάποιο τρόπο, η μαθηματική Ανάλυση είναι μία μουσική συμφωνία του απείρου.

Η μεγάλη πρόοδος του Απειροστικού λογισμού οφείλεται κυρίως στη χρήση μαθηματικών συστημάτων με άπειρο αριθμό στοιχείων. Επειδή, όμως, ήταν αληθοφανής η ταύτιση του απείρου με το «πολύ μεγάλο», σχεδόν αμέσως παρουσιάστηκαν αντιφάσεις, τα λεγόμενα παράδοξα του απειροστικού λογισμού[5], τα οποία ήσαν εν μέρει γνωστά στους αρχαίους σοφιστές. Η αναγνώριση, όμως, ότι πολλά θεωρήματα που ισχύουν για το πεπερασμένο (λ.χ., ότι το μέρος είναι μικρότερο του όλου, ότι υπάρχει ένα ελάχιστο ή ένα μέγιστο, ότι η σειρά των όρων ενός αθροίσματος ή των παραγόντων ενός γινομένου μπορεί να τροποποιηθεί) δεν μπορούν να επεκταθούν αμέσως και χωρίς περιορισμούς στο άπειρο, ήταν σημαντικό βήμα προόδου. Στην αρχή της διάλεξής μου ανέφερα το γεγονός ότι αυτά τα ζητήματα διασαφηνίστηκαν πλήρως, κυρίως χάρη στην οξύνοια του Weierstrass. Σήμερα η ανάλυση είναι όχι μόνο αλάθητη μέσα στο χώρο της, αλλά έγινε και πρακτικό εργαλείο για τη χρήση του απείρου.

Μόνη της, όμως, η ανάλυση δεν αρκεί ώστε να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση του απείρου. Την κατανόηση αυτή μας παρέχει ένας κλάδος που πλησιάζει περισσότερο προς ένα γενικό τρόπο φιλοσοφικού σκέπτεσθαι και έμελλε να ρίξει νέο φως πάνω στο πλέγμα των

[5] Γύρω στα τέλη του 17ου αιώνα και στις αρχές του 18ου οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να κατανοούν αρχές της ανάλυσης. Κι εδώ όμως τα παράδοξα του απείρου δεν άργησαν να φανούν:

Μεγάλος λόγος έγινε για το άθροισμα της άπειρης σειράς

S= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1…………….

Κάποιοι είπαν:

S= (1-1)+(1-1)+(1-1) +(1-1)+(1-1)+……..=0+0+0+0+…….=0

Άλλοι πάλι το είδαν ως

S= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-……..=1-0-0-0-0-0-…….=1

O Louitzi Guino Grandi(1671-1742) έδωσε την «Σολομόντια» λύση:

Υποστήριξε ότι επειδή οι τιμές για το άθροισμα 0 ή 1 «είναι εξ ίσου πιθανές» , τότε

S= 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+……..)=1-S

Άρα $S=1-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$

ζητημάτων που σχετίζονται με το άπειρο: Πρόκειται για τη θεωρία των συνόλων που δημιούργησε ο George Cantor. Εδώ όμως, θα μας απασχολήσει μόνο το μοναδικό και το πρωτότυπο εκείνο τμήμα της, που αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα τους, δηλ. η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών. Κατά την γνώμη μου αυτή η θεωρία είναι το άνθος της μαθηματικής μεγαλοφυΐας και μία από τις μεγαλύτερες κατακτήσεις της καθαρά νοητικής ανθρώπινης δραστηριότητας. Άλλα περί τίνος πρόκειται;

Αν θέλαμε να χαρακτηρίσουμε συνοπτικά τη νέα αντίληψη του απείρου που εισήγαγε ο Cantor , θα μπορούσαμε να πούμε: Στην Ανάλυση ασχολούμαστε με το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό μόνο ως οριακές έννοιες ως κάτι που γίνεται, που γεννάται , που σχηματίζεται δηλ., όπως λέμε, με το **δυνάμει άπειρο** . Αλλά αυτό δεν είναι το αληθινό άπειρο. Συναντάμε το αληθινό άπειρο όταν, λ.χ., θεωρούμε την ολότητα των αριθμών 1, 2, 3, 4,……... ως μια ολοκληρωμένη οντότητα, όταν θεωρούμε τα σημεία ενός διαστήματος ως μία δεδομένη και ολοκληρωμένη ολότητα αντικειμένων. Αυτό το είδος του απείρου γίνεται **ενεργεία άπειρο.**

Ο **Frege** και ο **Dedekind,** δύο μαθηματικοί που φημίζονται για τις εργασίες τους στη θεμελίωση των μαθηματικών, χρησιμοποίησαν, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλο, το ενεργεία άπειρο για να θεμελιώσουν την αριθμητική, ανεξάρτητα από την εποπτεία ή την εμπειρία. Η θεμελίωση αυτή βασιζόταν στην καθαρή λογική και δεν χρησιμοποιούσε παρά μόνο την καθαρά λογική παραγωγή. Ο Dedekind μάλιστα έφτασε στο σημείο να μην αντλήσει την έννοια του πεπερασμένου αριθμού από την εποπτεία, αλλά να την παραγάγει λογικά χρησιμοποιώντας την έννοια του άπειρου συνόλου. Αυτός όμως που ανέπτυξε συστηματικά την έννοια του ενεργεία απείρου ήταν ο Cantor. Ας κοιτάξουμε τα δύο παραδείγματα απείρου που αναφέραμε πιο πάνω:

1. 1 , 2 , 3 , 4, ………………….
2. Τα σημεία του ευθύγραμμου διαστήματος με άκρα το 0 και το 1 ή, ισοδύναμα, η ολότητα των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στο 0 και στο 1.

Είναι πολύ φυσικό να εξετάσει κανείς αυτά τα παραδείγματα από την άποψη του πληθικού μεγέθους τους. Τότε όμως, παρατηρούμε εκπληκτικά γεγονότα με τα οποία είναι σήμερα εξοικειωμένοι όλοι οι μαθηματικοί. Διότι, αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ρητών αριθμών, δηλ. όλων των κλασμάτων $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},.....\frac{3}{7}$.........., αποκλειστικά από την άποψη του πληθικού μεγέθους του, αυτό το σύνολο δεν είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των ακέραιων αριθμών.[6] Γι' αυτό λέμε ότι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να απαριθμηθούν με τον συνηθισμένο τρόπο ή ότι είναι αριθμήσιμοι. Το ίδιο ισχύει για το σύνολο όλων των ριζών τους, ακόμα και για το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών. Το δεύτερο παράδειγμα είναι παρόμοιο: όσο κι αν φαίνεται παράξενο, το σύνολο των σημείων ενός τετραγώνου ή ενός κύβου, δεν υπερβαίνει το σύνολο των σημείων του διαστήματος από το 0 έως το 1 Το ίδιο ισχύει και για το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων. Την πρώτη φορά που πληροφορείται κανείς αυτά τα αποτελέσματα, θα μπορούσε να σκεφτεί ότι από την άποψη του μεγέθους υπάρχει μόνο ένα άπειρο. Αυτό όμως δεν συμβαίνει: Τα σύνολα στα παραδείγματα (1) και (2) δεν είναι, όπως λέμε, «ισοδύναμα». Πράγματι το σύνολο (2) δεν είναι αριθμήσιμο[7], γιατί είναι μεγαλύτερο από το σύνολο (1). Σ' αυτό

[6] Συγκεκριμένα , μπορεί να τεθεί σε μια 1-1 και επί αντιστοίχηση με το Ί .
[7] Σύμφωνα με το διάσημο «διαγώνιο επιχείρημα του Cantor» , αποδεικνύεται ότι το (0,1) είναι υπεραριθμήσιμο , δηλαδή δεν μπορεί να τεθεί σε μια 1-1 και επί αντιστοίχηση με το Ί . Μάλιστα αν θεωρήσουμε ότι η ισχύς του Ί είναι ¡$_0$ (άλεφ μηδέν) τότε η ισχύς του (ο,1) είναι $2^{¡}{}_0$ και βεβαίως $2^{¡}{}_0$> ¡$_0$

έγκειται η χαρακτηριστική στροφή των ιδεών του Cantor. Τα σημεία του διαστήματος δεν μπορούν να απαριθμηθούν με τον συνηθισμένο τρόπο, δηλ. μετρώντας 1,2,3,…..! Αλλά αν δεχθούμε το ενεργεία άπειρο. δεν είμαστε υποχρεωμένοι να περιορισθούμε σ' αυτό το είδος μέτρησης ούτε να σταματήσουμε σ' αυτό το σημείο. Όταν μετρήσουμε 1, 2, 3,...,…. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα αντικείμενα που απαριθμήσαμε αποτελούν ένα άπειρο σύνολο που ολοκληρώθηκε με τη συγκεκριμένη τούτη διάταξη· αν, ακολουθώντας τον Cantor, συμβολίσουμε τον τύπο αυτής της τάξης με το *ω,* η αρίθμηση συνεχίζεται με φυσικό τρόπο με το ω + 1, ω+2 .... έως το το ω+ω ή ω.2·

Κατόπιν με το ω.2 + 1, ω.2 + 2, ω.2 + 3 …..ω.2 +ω = ω.3 και, ακόμα, με το ω.2, ω.3, ω.4, ……. το ω.ω(= $ω^2$) $ω^2$+1………

Τελικά έχουμε τον ακόλουθο Πίνακα:

1, 2, 3,…………………………………………………………..

ω, ω + 1 , ω + 2 , ω+3 , ω+4 , ……………………………………

ω.2, (ω.2) + 1, (ω.2) + 2, ……………………………………………

ω.3, (ω.3) + 1, (ω.3) + 2,…………………………………………...

.

.

.

$ω^2$, $ω^2$+1 , $ω^2$+2, $ω^2$+3, …………………………

$ω^2$+ω , $ω^2$+ω.2 , $ω^2$+ω.3 , …………

($ω^2$.2) , ($ω^2$.2)+1 , ……………….

($ω^2$.2)+ω, ($ω^2$.2)+(ω.2) , …………..

$ω^3$,………………………..

$ω^4$, ……………………….

.

.

.

.

$\omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$, ……………………………..

Αυτοί είναι οι πρώτοι υπερπεπερασμένοι αριθμοί του Cantor ή, όπως τους ονομάζει ο ίδιος, οι αριθμοί της δεύτερης αριθμητικής κλάσης. Σ'

αυτούς φτάνουμε με μία απλή υπεραρίθμηση συνεχίζοντας πέρα από το κοινό αριθμήσιμο άπειρο, δηλ. με μία εντελώς φυσική και μονοσήμαντα καθορισμένη, συστηματική εξακολούθηση της συνηθισμένης απαρίθμησης, όπως γίνεται με τους αριθμούς του πεπερασμένου. Όπως πρωτύτερα μετρούσαμε μόνο το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο,.. . στοιχείο ενός συνόλου, τώρα μετράμε και το ω-στό, το (ω + 1)-στό, το (ω + 2)-στο αντικείμενο.

Δεδομένων αυτών των εξελίξεων, είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς αμέσως, αν χρησιμοποιώντας αυτούς τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, μπορούμε πραγματικά να αριθμήσουμε τα σύνολα εκείνα που δεν μπορούν να απαριθμηθούν με την κοινή σημασία του όρου.

Βάσει αυτών των εννοιών ο **Cantor** ανέπτυξε τη θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών με πολύ ικανοποιητικό τρόπο και επινόησε γι' αυτούς έναν πλήρη λογισμό. Έτσι, χάρη στην Ηράκλεια συνεργασία του **Frege**, του **Dedekind** και του **Cantor,** το άπειρο ανέβηκε στο θρόνο και απόλαυσε την περίοδο του μεγάλου θριάμβου του. Αποτολμώντας να πετάξει, το άπειρο είχε φτάσει στην ιλιγγιώδη κορυφή της επιτυχίας.

Η αντίδραση δεν άργησε να φανεί. Πήρε δραματική μορφή και παρουσιάστηκε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και η αντίδραση στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Στη χαρά τους για τα νέα και σημαντικά αποτελέσματα, οι μαθηματικοί δεν φρόντισαν να ελέγξουν

την εγκυρότητα των τρόπων συμπερασμού που χρησιμοποιούσαν. Πράγματι, ξεπρόβαλαν βαθμιαία αντιφάσεις που οφείλονταν στη χρήση συνηθισμένων τρόπων εισαγωγής εννοιών και μεθόδων συμπερασμού. Οι αντιφάσεις αυτές, τα λεγόμενα παράδοξα της Θεωρίας των συνόλων, αν και αρχικά ήταν σποραδικές, δεν άργησαν να γίνουν οξύτερες και σοβαρότερες. Ιδιαίτερα μία αντίφαση της οποίας η ανακάλυψη οφείλεται στον **Zermelo** και στον **Russell,** είχε εντελώς καταστροφική επίδραση, όταν έγινε γνωστή στον μαθηματικό κόσμο. Μπροστά σ' αυτά τα παράδοξα, ο **Dedekind** και ο **Frege** εγκατέλειψαν τις απόψεις τους και τραβήχτηκαν από τον αγώνα: ο **Dedekind** δίστασε πολύ προτού επιτρέψει τη δημοσίευση μιας νέας έκδοσης της πραγματείας του *Was sind und was so/len die Zahlen,* Που είχε αφήσει εποχή και ο **Frege**, σ έναν επίλογο, αναγκάστηκε να ομολογήσει ότι η κατεύθυνση του βιβλίου του *Grundgesetze der Arithmetik* ήταν λαθεμένη. Η ίδια η Θεωρία του Cantor έγινε στόχος εξαιρετικά σκληρών επιθέσεων από όλες τις πλευρές. Η αντίδραση αυτή ήταν τόσο βίαιη, που απειλήθηκαν οι κοινότερες και γονιμότερες έννοιες και οι απλούστερες και σημαντικότερες μέθοδοι συμπερασμού των μαθηματικών και η χρήση τους κόντεψε να κηρυχθεί παράνομη. Φυσικά, η παλαιά τάξη είχε υπερασπιστές, αλλά η τακτική τους ήταν πολύ άτολμη και ποτέ τους δεν ενώθηκαν σε κοινό μέτωπο στα ζωτικά σημεία. Προτάθηκε πληθώρα θεραπειών για τα παράδοξα, αλλά οι μέθοδοι για τη διασάφησή τους ήταν μεταξύ τους ασυμβίβαστες.

Ομολογουμένως η τωρινή κατάσταση ως προς τα παράδοξα είναι αφόρητη. Σκεφτείτε μόνο ότι στα μαθηματικά, το πρότυπο της βεβαιότητας και

της αλήθειας, οι ορισμοί και οι μέθοδόι παραγωγής που όλοι μαθαίνουν, διδάσκουν και χρησιμοποιούν, οδηγούν σε παραλογισμούς! Και πού θα

βρει κανείς βεβαιότητα και αλήθεια, αν ακόμη και η μαθηματική σκέψη είναι ατελής;

Υπάρχει όμως ένας εντελώς ικανοποιητικός τρόπος για να αποφευχθούν τα παράδοξα, χωρίς να προδοθεί η επιστήμη μας. Οι σκέψεις που μας οδηγούν στην ανακάλυψη αυτού του τρόπου και η επιθυμία που μας δείχνει το δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι οι εξής:

1. Όταν υπάρχει και η παραμικρή ελπίδα διάσωσης, θα εξετάσουμε προσεκτικά όλες τις δημιουργίες εννοιών και τις γόνιμες μεθόδους συμπερασμού και θα τις φροντίσουμε, θα τις ενισχύσουμε και θα τις καταστήσουμε εύχρηστες. Κανείς δεν θα μπορέσει να μας διώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο **Cantor**.[8]

2. Πρέπει να επεκταθεί σε όλα τα Μαθηματικά η ασφάλεια των μεθόδων συμπερασμού που χρησιμοποιεί η στοιχειώδης Θεωρία των αριθμών· κανείς δεν αμφισβητεί την αξιοπιστία της και οι αντιφάσεις και τα παράδοξα οφείλονται μόνο στην αμέλειά μας.

Είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε αυτούς τους στόχους παρά μόνο μετά από την πλήρη διασάφηση της φύσης του απείρου.

Προηγουμένως είδαμε ότι το άπειρο δεν βρίσκεται πουθενά στην πραγματικότητα, όποια εμπειρία, παρατήρηση ή επιστήμη κι αν επικαλεσθούμε. Μπορεί η σκέψη πάνω στα πράγματα να είναι τόσο διαφορετική από τα πράγματα; Μπορούν οι διαδικασίες της σκέψης να διαφέρουν τόσο πολύ από τις πραγματικές διαδικασίες των πραγμάτων; Με δύο λόγια, μπορεί η σκέψη να είναι τόσο απομακρυσμένη από την πραγματικότητα; Μήπως δεν είναι ξεκάθαρο ότι, όταν πιστεύαμε πως κατά κάποιο τρόπο συναντήσαμε την πραγματικότητα του απείρου, αφεθήκαμε σ’ αυτή την πεποίθηση, επειδή συχνά συναντάμε στην πραγματικότητα διαστάσεις

που είναι εξαιρετικά μεγάλες ή μικρές; Μας εξαπατά ποτέ και μας εγκαταλείπει ο περιεκτικός[3] λογικός συμπερασμός, όταν τον εφαρμόζουμε σε αληθινά αντικείμενα[9] ή συμβάντα; Όχι! Ο περιεκτικός λογικός συμπερασμός είναι αναντικατάστατος. Μας εξαπάτησε μόνο όσες φορές δεχθήκαμε αυθαίρετους και αφηρημένους ορισμούς εννοιών, ιδιαίτερα εκείνων στις οποίες υπάγεται ένας άπειρος αριθμός αντικειμένων. Σ αυτές τις περιπτώσεις τον χρησιμοποιούμε αθέμιτα, δηλ. δεν προσέχουμε αρκετά τις αναγκαίες προϋποθέσεις για την έγκυρη εφαρμογή του. Και με το να αναγνωρίσουμε ότι υπάρχουν τέτοιες προϋποθέσεις που πρέπει να τις σεβαστούμε, συμφωνούμε με τους φιλοσόφους και ιδιαίτερα με τον **Kant**. Ο **Kant** δίδασκε —και τούτο είναι αναπόσπαστο μέρος της Θεωρίας του— ότι τα μαθηματικά διαθέτουν μία ύλη που είναι ασφαλής ανεξάρτητα από κάθε λογική. Επομένως, τα μαθηματικά δεν μπορούν να θεμελιωθούν μόνο στη Λογική. Γι’ αυτό οι

προσπάθειες του **Frege** και του **Dedekind** ήταν καταδικασμένες σε αποτυχία. Προϋπόθεση για να χρησιμοποιήσουμε τον λογικό συμπερασμό και να εκτελέσουμε λογικές πράξεις είναι να έχει ήδη δοθεί κάτι σαν παράσταση : δηλ. συγκεκριμένα εξωλογικά αντικείμενα δοσμένα στην εποπτεία ως άμεσες εμπειρίες πριν από κάθε σκέψη. Για να είναι ασφαλής ο λογικός συμπερασμός, πρέπει τα αντικείμενα αυτά να μπορούν να εποπτευθούν από κάθε τους πλευρά. και το γεγονός ότι παρουσιάζονται, ότι διαφέρουν μεταξύ τους, ότι το ένα ακολουθεί το άλλο, ή ότι είναι συνδυασμένα μεταξύ τους, πρέπει να δίδεται άμεσα στην εποπτεία μαζί με τα αντικείμενα, ως κάτι που δεν επιδέχεται παραπέρα αναγωγή σε κάτι άλλο ή δεν χρειάζεται αναγωγή. Αυτή είναι η

[8] Η φράση αυτή του Hilbert έχει καταστεί τρόπον τινά παροιμιώδης και βέβαια με αυτή, ασφαλώς θέλει να τονίσει την τεράστια σημασία της θεωρίας των συνόλων και την αναγκαιότητα διάσωσής της από τα εγγενή της παράδοξα.

[9] Μια μικρή υποσημείωση στο πρωτότυπο που υπάρχει εδώ και αφορά την μετάφραση της Γερμανικής λέξης «inhalttlich» , λόγω κακής φωτοτυπικής αναπαραγωγής δεν μπορεί να αποδοθεί.

βασική φιλοσοφική θέση που θεωρώ αναγκαία όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά, γενικότερα, για κάθε επιστημονική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία. Και, ειδικά στα μαθηματικά, αντικείμενο της μελέτης μας είναι τα ίδια τα συγκεκριμένα σημεία των οποίων η μορφή είναι, βάσει της θέσης που υιοθετήσαμε, άμεσα σαφής και αναγνωρίσιμη.

Ας στρέψουμε την προσοχή μας στη φύση και τις μεθόδους της περατοκρατικής[4] Θεωρίας των αριθμών. Αυτή η θεωρία μπορεί ασφαλώς να αναπτυχθεί μέσω αριθμητικών κατασκευών που στηρίζονται αποκλειστικά σε περιεχομενικές εποπτικές θεωρήσεις. Αλλά με κανένα τρόπο οι μαθηματικές εξισώσεις δεν εξαντλούν τη μαθηματική επιστήμη ούτε αυτή μπορεί να αναχθεί σ' αυτές μονάχα. Θα μπορούσε, όμως, κανείς να ισχυρισθεί ότι τα μαθηματικά είναι ένας μηχανισμός που πρέπει, όταν εφαρμόζεται σε ακεραίους αριθμούς. να δίνει πάντα ορθές αριθμητικές εξισώσεις. Τότε όμως , θα έπρεπε να μελετήσουμε αρκετά διεξοδικά τη δομή αυτού του μηχανισμού, ώστε να βεβαιωθούμε ότι οδηγεί πάντοτε σε ορθές αριθμητικές εξισώσεις. Και το εργαλείο που διαθέτουμε για να κάνουμε αυτή την έρευνα είναι το ίδιο εργαλείο που χρησιμοποιούμε για την παραγωγή των αριθμητικών εξισώσεων όταν κατασκευάζουμε τη θεωρία των αριθμών, δηλ. το ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο υλικό περιεχόμενο, τον περατοκρατικό τρόπο σκέψης. Και πράγματι μπορούμε να ανταποκριθούμε σ' αυτό το επιστημονικό αίτημα, δηλ., είναι δυνατόν να έχουμε με τρόπο καθαρά εποπτικό και περατοκρατικό (ακριβώς όπως βρίσκουμε τις αλήθειες της θεωρίας των αριθμών) τις συλλήψεις που εξασφαλίζουν την αξιοπιστία του μαθηματικού μηχανισμού. Ας εξετάσουμε τη θεωρία των αριθμών από πιο κοντά.

Στη θεωρία των αριθμών έχουμε τα αριθμητικά σύμβολα :

1, 11 , 111 , 1111 ,11111, 111111 , ……………

όπου κάθε αριθμητικό σύμβολο μπορεί να αναγνωρισθεί εποπτικά εξ αιτίας του γεγονότος ότι το σύμβολο 1 ακολουθείται πάντα από ένα άλλο 1. Αυτά τα αριθμητικά σύμβολα που αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης μας, μόνα τους δεν σημαίνουν τίποτα. Ωστόσο στη στοιχειώδη Θεωρία των αριθμών χρησιμοποιούμε εκτός από αυτά τα , σύμβολα και άλλα που σημαίνουν κάτι και εξυπηρετούν την επικοινωνία. Λόγου χάρη, το σύμβολο[10] 2 χρησιμοποιείται ως σύντμηση του αριθμητικού συμβόλου 11 και το σύμβολο 3 ως σύντμηση του αριθμητικού συμβόλου 111. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τα σύμβολα +, - και άλλα, για να μεταδώσουμε βεβαιώσεις. Έτσι χρησιμοποιούμε την 2 + 3 = 3 + 2 για να μεταδώσουμε το γεγονός ότι τα 2 + 3 και 3 + 2, όταν ληφθούν υπόψη οι συντμήσεις, αποτελούντο ίδιο αριθμητικό σύμβολο, δηλ. το 11111. Ομοίως, χρησιμοποιούμε το 3-2 για να μεταδώσουμε το γεγονός ότι το μήκος του συμβόλου 3 (δηλ. του 111) είναι μεγαλύτερο του μήκους του συμβόλου 2 (δηλ. του 11) ή, με άλλα λόγια, ότι το τελευταίο σύμβολο είναι γνήσιο τμήμα του πρώτου.

Για να επικοινωνήσουμε χρησιμοποιούμε και τα γράμματα a, b, c ως αριθμητικά σύμβολα . Επομένως, το b>a μεταδίδει την πληροφορία ότι το αριθμητικό σύμβολο b έχει μεγαλύτερο μήκος από ό,τι το σύμβολο a. Ομοίως, από την παρούσα σκοπιά, το a+b=b+a μεταδίδει μόνο το γεγονός ότι το αριθμητικό σημείο a+b είναι το ίδιο με το b+a. Εδώ, μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την περιεχομενική ορθότητα αυτής της πληροφορίας με τη βοήθεια του περιεκτικού συμπερασμού. Και, μπορούμε, με αυτό το εποπτικό περιεχομενικό είδος πραγμάτευσης, να προχωρήσουμε και να φτάσουμε πολύ μακριά.

[10] Στην μετάφραση του κ. Χριστοδουλίδη , έχει προτιμηθεί ο όρος «σημείο», προφανώς με την έννοια του σημαίνοντος κι όχι την γεωμετρική τιαύτη. Έχουμε όμως την εντύπωση –δεδομένης της ευρύτατα γεωμετρικά καθιερωμένης έννοιας του σημείου- ότι καλύτερα αποδίδεται το νόημα με τον όρο «σύμβολο», ο οποίος αντικαθιστά το «σημείο» αρκετές φορές στο κείμενο.

Θα ήθελα τώρα να σας δώσω ένα πρώτο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο μπορούμε να υπερβούμε τα όρια αυτής της εποπτικής μεθόδου. Από τους πρώτους αριθμούς ο μέγιστος που γνωρίζουμε σήμερα έχει 39 ψηφία[11] και είναι ο

p= 178 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

Με τη μέθοδο του Ευκλείδη, και στο πλαίσιο της στάσης που υιοθετήσαμε, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα ότι ανάμεσα στον p +1 και στον p!+1 υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός. Επιπλέον, η ίδια η διατύπωση του θεωρήματος εναρμονίζεται τέλεια με την περατοκρατική προσπέλαση, γιατί εδώ η έκφραση «υπάρχει» χρησιμεύει μόνο για την επιβράχυνση της πρότασης:

> Είναι βέβαιο ότι ο p+1 ή ο p+2 ή ο p+3 …….ή ο p+1 είναι πρώτος αριθμός.

Επιπλέον, αφού είναι φανερό ότι η πρόταση αυτή ισοδυναμεί με την:

> “Υπάρχει ένας Πρώτος αριθμός που είναι (1) μεγαλύτερος p και (2) ταυτόχρονα μικρότερος ή ίσος του p!+1”

φτάνουμε στη διατύπωση ενός θεωρήματος που εκφράζει μόνο ένα μέρος του περιεχομένου της βεβαίωσης του Ευκλείδη. δηλ. υπάρχει ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του p . Ως προς το περιεχόμενο, η βεβαίωση αυτή είναι πολύ ασθενέστερη, αφού εκφράζει μόνο ένα μέρος της πρότασης του Ευκλείδη ωστόσο, όσο κι αν φαίνεται επικίνδυνο το πέρασμα σ’ αυτήν, αν απομονώσουμε από τα συμφραζόμενά της τη

---

[11] Βεβαίως σήμερα γνωρίζουμε αρκετές δεκάδες εκατομμύρια ψηφίων του π , και συνεχώς οι Η/Υ βρίσκουν περισσότερα.

μερική πρόταση και τη διατυπώσουμε ως ανεξάρτητη βεβαίωση, το πέρασμα αυτό συνεπάγεται ένα άλμα στο υπερπεπερασμένο.

Πώς είναι δυνατόν; Έχουμε μια υπαρκτική πρόταση με το «υπάρχει». Και στο θεώρημα του Ευκλείδη είχαμε μια τέτοια πρόταση, αλλά σ' αυτό, όπως είπα νωρίτερα, το «υπάρχει» είναι σύντμηση της:

«p + 1 ή ο p + 2 ή ο p+3 ..... είναι πρώτος αριθμός»,

ακριβώς όπως συμβαίνει όταν, αντί να λέω: «Τούτο το κομμάτι κιμωλίας είναι κόκκινο ή εκείνο το κομμάτι κιμωλίας είναι κόκκινο», λέω για συντομία: «Ανάμεσα σε τούτα τα κομμάτια κιμωλίας υπάρχει ένα κόκκινο κομμάτι». Η βεβαίωση ότι, σε μία πεπερασμένη ολότητα «υπάρχει» ένα αντικείμενο που έχει μία ορισμένη ιδιότητα, εναρμονίζεται απόλυτα με την περατοκρατική στάση μας. Από την άλλη μεριά, η έκφραση:

ο p + 1 ή ο p + 2 ή ο p +3 ή.. ….. (επ' άπειρον) είναι πρώτος αριθμός,

είναι, σαν να λέγαμε, ένα άπειρο λογικό γινόμενο[6], και μια τέτοια μετάβαση στο άπειρο δεν επιτρέπεται χωρίς ειδική διερεύνηση και, ενδεχομένως, χωρίς εισαγωγή ορισμένων προφυλακτικών μέτρων. Συμβαίνει ακριβώς ό,τι και στην ανάλυση, προκειμένου για τη μετάβαση από ένα πεπερασμένο γινόμενο σ' ένα άπειρο γινόμενο· στη γενική περίπτωση αυτή η επέκταση δεν έχει νόημα.

Γενικά, από την περατοκρατική σκοπιά, μία υπαρκτική πρόταση της μορφής «υπάρχει ένας αριθμός που έχει την άλφα ή τη βήτα ιδιότητα» έχει νόημα μονάχα ως ***μερική*** πρόταση , δηλ. ως μέρος μιας πρότασης που είναι καθορισμένη με μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά της οποίας το

ακριβές περιεχόμενο δεν χρησιμοποιείται ουσιαστικά σε πολλές εφαρμογές.

Συναντάμε το υπερπεπερασμένο όταν από μία υπαρκτική πρόταση αντλήσουμε μία μερική πρόταση που δεν μπορεί να θεωρηθεί ως πεπερασμένη[7] διάζευξη. Ομοίως, αν αρνηθούμε μία καθολική βεβαίωση, δηλ. μία βεβαίωση που αναφέρεται σε αυθαίρετα αριθμητικά σημεία, έχουμε μία υπερπεπερασμένη βεβαίωση. Ας πάρουμε. λ.χ., την πρόταση ότι αν το a είναι ένα αριθμητικό σύμβολο, πρέπει πάντοτε να ισχύει

$$a+1=1+a$$

Από την περατοκρατική σκοπιά η πρόταση αυτή δεν μπορεί να *γίνει* αντικείμενο άρνησης. Αυτό θα γίνει σαφέστερο. αν παρατηρήσουμε ότι η πρόταση δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως άπειρος συνδυασμός αριθμητικών εξισώσεων διαμέσου του «και», αλλά μόνο ως υποθετική κρίση που βεβαιώνει κάτι. όταν δοθεί ένα αριθμητικό σημείο.

Ειδική συνέπεια αυτού είναι ότι, σύμφωνα με το πνεύμα της περατοκρατικής άποψης, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μία εξίσωση, όπως αυτή που μόλις δώσαμε, στην οποία παρουσιάζεται. ένα αυθαίρετο αριθμητικό σημείο, ή ισχύει για κάθε αριθμητικό σημείο ή ότι το αντίθετό της μπορεί να αποδειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα. Ένα επιχείρημα όπως αυτό, όντας εφαρμογή της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου, βασίζεται στην προϋπόθεση ότι η εδραίωση της καθολικής εγκυρότητας της εξίσωσης αυτής μπορεί να γίνει αντικείμενο άρνησης.

Πάντως, παρατηρούμε τα ακόλουθα: αν περιοριστούμε —όπως και πρέπει— στο πεδίο των περατοκρατικών προτάσεων, οι λογικές σχέσεις δεν είναι καθόλου ευσύνοπτες και αυτή η έλλειψη του ευσύνοπτου γίνεται αφόρητη όταν τα «αν» και «για κάθε» παρουσιάζονται συνδυασμένα ή με προτάσεις που η μια τους είναι τοποθετημένη μέσα στην άλλη. Πάντως δεν ισχύουν οι νόμοι της λογικής που οι άνθρωποι τους χρησιμοποιούν από τότε που άρχισαν να σκέφτονται, οι νόμοι που

δίδαξε ο Αριστοτέλης. Φυσικά θα μπορούσαμε να δρούμε νόμους που να ισχύουν για το πεδίο των περατοκρατικών προτάσεων, αλλά αυτό δεν θα μας ήταν και πολύ χρήσιμο, γιατί δεν θέλουμε να παραιτηθούμε από τη χρήση των απλών νόμων της Αριστοτελικής λογικής. Και κανένας, ακόμα κι αν μιλάει τη γλώσσα των αγγέλων, δεν μπορεί να εμποδίσει τους ανθρώπους να αρνούνται γενικές βεβαιώσεις, να διατυπώνουν μερικές κρίσεις και να χρησιμοποιούν την αρχή του αποκλειομένου τρίτου. Τι πρέπει να κάνουμε λοιπόν;

Μην ξεχνάμε ότι είμαστε μαθηματικοί και ότι, ως μαθηματικοί, συχνά βρεθήκαμε σε δύσκολη θέση από την οποία μας έβγαλε η μέθοδος των ιδεατών στοιχείων, η μεγαλοφυής αυτή δημιουργία που μας επέτρεψε να βρούμε μια διέξοδο. Στην αρχή της διάλεξής μου παρουσίασα μερικά λαμπρά παραδείγματα της μεθόδου των ιδεατών στοιχείων. Για να κρατήσουμε τους τυπικά απλούς κανόνες της κοινής Αριστοτελικής λογικής πρέπει στις περατοκρατικές Προτάσεις να προσθέσουμε τις ιδεατές Προτάσεις, ακριβώς όπως εισήχθη ο $i=\sqrt{-1}$ για να διατηρήσουν την απλή μορφή τους οι νόμοι της άλγεβρας, λ.χ. αυτοί που αφορούν την ύπαρξη και τον αριθμό των ριζών μιας εξίσωσης ή. ακόμα, όπως εισήχθησαν ιδεατοί~ παράγοντες για να μπορούν να διατηρηθούν οι απλοί νόμοι της διαιρετότητας και για τους αλγεβρικούς αριθμούς: λ.χ., εισάγουμε έναν ιδεατό κοινό διαιρέτη των αριθμών 2 και $1+\sqrt{-5}$, αν και αυτός δεν υπάρχει πραγματικά. Και είναι περίεργο το ότι οι μέθοδοι συμπερασμού που ο Kronecker πολέμησε με τόσο πάθος είναι το ακριβές σύστοιχο εκείνου που ο ίδιος ο Kronecker θαύμαζε με τόσο ενθουσιασμό στο έργο του Kummer πάνω στη θεωρία των αριθμών, θεωρία που την επαινούσε ως το ύψιστο μαθηματικό επίτευγμα.

Αλλά πώς φτάνουμε στις ιδεατές προτάσεις. Είναι αξιοσημείωτο και ασφαλώς ευνοϊκό το γεγονός ότι, για να μπούμε στο δρόμο που οδηγεί σ' αυτές. αρκεί να εξακολουθήσουμε να αναπτύσσουμε με φυσικό και

συνεπή τρόπο την υπάρχουσα θεμελιωτική θεωρία των μαθηματικών. Πραγματικά, πρέπει να πεισθούμε ότι ακόμα και τα στοιχειώδη μαθηματικά υπερβαίνουν την εποπτική θεωρία των αριθμών. Γιατί η μέθοδος του αλγεβρικού υπολογισμού με γράμματα δεν περιέχεται στην περιεχομενική εποπτική θεωρία των αριθμών, όπως την αντιλαμβανόμασταν μέχρι σήμερα. Σ’ αυτή τη θεωρία, οι τύποι χρησιμοποιούνταν αποκλειστικά για λόγους επικοινωνίας· τα γράμματα σήμαιναν αριθμητικά στοιχεία και η εξίσωση μετέδιδε το γεγονός ότι συνέπιπταν δύο αριθμητικά σύμβολα. Αντίθετα στην άλγεβρα θεωρούμε τις εκφράσεις που περιέχουν γράμματα ως ανεξάρτητες δομές αυτές καθ’ εαυτές οι οποίες εξυπηρετούν την τυποποίηση των περιεχομενικών προτάσεων της αριθμοθεωρίας. Στη θέση των προτάσεων που αφορούν αριθμητικά σημεία, τώρα έχουμε τύπους που είναι συγκεκριμένα αντικείμενα εποπτικής εξέτασης, και στη θέση της αριθμοθεωρητικής περιεχομενικής απόδειξης μπαίνει τώρα η παραγωγή ενός τύπου από τον άλλο σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες.

Γι’ αυτό, όπως είδαμε, στην άλγεβρα έχουμε μία αύξηση των περατοκρατικών αντικειμένων. Ως εδώ, αυτά τα αντικείμενα ήταν μόνο αριθμητικά σημεία, όπως τα 1, 11,.. …. 11111 μόνο αυτά αποτελούσαν αντικείμενα της περιεχομενικής μελέτης μας. Αλλά και στην άλγεβρα η μαθηματική πρακτική ήδη πάει παραπέρα. Πράγματι, ακόμα και όταν μία πρόταση είναι έγκυρη από την περατοκρατική σκοπιά μας, στο βαθμό που συνδέεται με κάποια ένδειξη για την περιεχομενική ερμηνεία της, όπως, λ.χ., η πρόταση ότι πάντοτε

$$a+b=b+a$$

όπου τα a και b σημαίνουν καθορισμένα αριθμητικά σύμβολα , προτιμάμε να μη χρησιμοποιήσουμε τούτη τη μορφή για επικοινωνία, αλλά την αντικαθιστούμε με τον τύπο

$$α+β=β+α .$$

Αυτός ο τύπος με κανέναν τρόπο δεν αποτελεί άμεση μετάδοση κάποιου περιεχομένου, αλλά είναι μία ορισμένη τυπική δομή της οποίας η σχέση με τις αρχικές περατοκρατικές προτάσεις

$$2+3=3+2,$$
$$5+7=7+5$$

συνίσταται στο ότι, όταν αντικαταστήσουμε τα α και β του τύπου τα με αριθμητικά σημεία 2,3,5,7, δηλ. όταν χρησιμοποιήσουμε μία αποδεικτική διαδικασία (έστω κι αν αυτή είναι εξαιρετικά απλή), πoριζόμαστε τις επι-μέρους περατοκρατικές προτάσεις Έτσι καταλήγουμε στην αντίληψη ότι τα a, b, = , + , καθώς και ολόκληρος ο τύπος

$$a+b=b+a ,$$

από μόνα τους δεν σημαίνουν τίποτε, ακριβώς όπως τα αριθμητικά σημεία δεν σημαίνουν τίποτε αυτά καθ’ εαυτά. Αλλά από τον τύπο μπορούν να παραχθούν άλλοι στους οποίους αποδίδουμε νόημα θεωρώντας ότι αυτοί ανακοινώνουν περατοκρατικές προτάσεις. Όταν γενικεύσουμε αυτή την αντίληψη, τα μαθηματικά γίνονται απογραφή τύπων που αυτοί καθ’ εαυτούς δεν σημαίνουν τίποτα και αποτελούν τις ιδεατές δομές της θεωρίας μας.

Τώρα, ποιος ήταν ο σκοπός μας Στα μαθηματικά βρήκαμε, από τη μία μεριά, περατοκρατικές προτάσεις που περιέχουν μόνο αριθμητικά σημεία, όπως οι

$$3 > 2 \quad , \quad 2 + 3 = 3 + 2 \quad , \quad 2 = 3 \quad , \quad 1 \neq 1,$$

οι οποίες, από την περατοκρατική σκοπιά, μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο άμεσης εποπτείας και είναι κατανοητές χωρίς προσφυγή σε κάτι άλλο. Αυτές επιδέχονται άρνηση και το αποτέλεσμα θα είναι αληθές ή ψευδές· σ’ αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αριστοτελική λογική ελεύθερα και χωρίς ενδοιασμούς· γι’ αυτές ισχύει Ο νόμος της μη αντίφασης, δηλαδή είναι αδύνατον μία πρόταση και η άρνησή της να είναι ταυτόχρονα αληθείς. Ισχύει η «αρχή του αποκλειόμενου τρίτου»: ή αληθεύει μία πρόταση ή αληθεύει η άρνησή της. Το να πούμε ότι μία πρόταση είναι ψευδής ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η άρνησή της είναι αληθής. Από την άλλη μεριά, εκτός από αυτές τις στοιχειώδεις προτάσεις που δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα, συναντήσαμε περατοκρατικές προτάσεις που έχουν κάτι το προβληματικό, λ.χ. αυτές που δεν είναι δυνατόν να κατακερματισθούν .

Τώρα τέλος, έχουμε εισαγάγει τις ιδεατές προτάσεις για να μπορούν να ισχύουν ξανά όλοι γενικά οι νόμοι της λογικής. Αλλά επειδή οι ιδεατές προτάσεις, δηλ. οι τύποι, δεν έχουν κανένα νόημα αφ’ εαυτών εφόσον δεν εκφράζουν περατοκρατικές βεβαιώσεις. εδώ οι λογικές πράξεις δεν έχουν εφαρμογή με περιεχομενικό τρόπο, όπως συμβαίνει όταν εφαρμόζονται στις περατοκρατικές προτάσεις. Είναι ανάγκη λοιπόν να τυποποιήσουμε τις λογικές πράξεις και τις ίδιες τις μαθηματικές αποδείξεις· τούτο απαιτεί τη μεταγραφή των λογικών σχέσεων σε τύπους· γι’ αυτό στα μαθηματικά σημεία πρέπει να προστεθούν και λογικά σημεία. όπως τα:

& ,	∨ ,	→ ,	~[12]
και	ή	συνεπάγεται	όχι

και, εκτός από τις μαθηματικές μεταβλητές a, b, c, . . . να χρησιμοποιήσουμε και λογικές μεταβλητές, δηλ. προτασιακές μεταβλητές A. B, C,..... Πώς μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό; Εδώ έχουμε την τύχη να μας βοηθάει η ίδια προδιατεταγμένη αρμονία που παρατηρήσαμε τόσο συχνά στην ιστορία της επιστήμης, η αρμονία που παραστάθηκε του Einstein όταν για τη θεωρία της βαρύτητας βρήκε ήδη τέλεια ανεπτυγμένο τον γενικό λογισμό των αναλλοιώτων· ανακαλύπτουμε ότι έχει ήδη γίνει αρκετή προκαταρκτική δουλειά: βρίσκουμε έτοιμο το λογισμό της λογικής. Αναμφίβολα, αρχικά ο λογικός λογισμός δημιουργήθηκε σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο· αρχικά τα σημεία του εισήχθησαν για να εξυπηρετήσουν την επι-κοινωνία. Ωστόσο είμαστε συνεπείς , αν τώρα από τα λογικά σημεία αφαιρέσουμε κάθε νόημα ακριβώς όπως κάναμε με τα μαθηματικά σημεία, και δηλώσουμε ότι οι τύποι του λογικού λογισμού είναι ιδεατά στοιχεία τα οποία αυτά καθ’ εαυτά δεν σημαίνουν τίποτε . Στον λογικό λογισμό βρίσκουμε μία γλώσσα σημείων, που επιτρέπει να παραστήσουμε τις μαθηματικές προτάσεις με τύπους και να εκφράσουμε τις λογικές παραγωγές με τη βοήθεια τυπικών διεργασιών. Με τρόπο που να αντιστοιχεί ακριβώς στο πέρασμα από την περιεχομενική αριθμο-θεωρία στην τυπική άλγεβρα θεωρούμε τα σημεία και τα σύμβολα των πράξεων του λογικού λογισμού ως αποχωρισμένα από το περιεχομενικό τους νόημα. Έτσι στη θέση της περιεχομενικής μαθηματικής γνώσης που μεταδίδεται με τη βοήθεια της κοινής γλώσσας, τελικά έχουμε έναν κατά-

[12] (Σημείωση στο πρωτότυπο κείμενο) Μολονότι ότι στην δημοσίευση του πρωτότυπου κειμένου του Hilbert χρησιμοποιείται «_» ως σύμβολο της άρνησης, εμείς εδώ έχομε χρησιμοποιήσει το «~» για καλύτερη ομοιομορφία με τα περιεχόμενα των άλλων επιστημονικών δημοσιεύσεων της παρούσας συλλογής

λογο τύπων που σχηματίζονται από μαθηματικά και λογικά σημεία, και ο ένας τύπος γεννιέται από τον άλλο, σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες. Μερικοί από τους τύπους αυτούς αντιστοιχούν στα μαθηματικά αξιώματα , ενώ στην περιεχομενική παραγωγή αντιστοιχούν οι κανόνες, σύμφωνα με τους οποίους ο ένας τύπος γεννιέται από τον άλλο. Επομένως, η περιεχομενική παραγωγή αντικαθίσταται από το χειρισμό των σημείων σύμφωνα με κανόνες· μ' αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται το πέρασμα από την αφελή στην τυπική πραγμάτευση αφ' ενός των αξιωμάτων (τα οποία αρχικά θεωρούνταν αφελώς ως θεμελιακές αλήθειες αλλά στη μοντέρνα αξιωματική θεωρούνται ήδη από καιρό ότι απλώς διασυνδέουν έννοιες) αφ' ετέρου του λογικού λογισμού (που αρχικά θεωρήθηκε μόνο ως μία άλλη γλώσσα).

Τώρα θα εξηγήσω με λίγα λόγια πώς τυποποιείται μία αξιωματική απόδειξη. Όπως είπα, ονομάζουμε αξιώματα ορισμένους τύπους που χρησιμεύουν ως υλικό για τη δόμηση του τυπικού οικοδομήματος των

μαθηματικών. Η μαθηματική απόδειξη είναι μία διάταξη που, ως διάταξη, πρέπει να μπορεί να προσφέρεται στην εποπτεία μας και συνίσταται σε συμπερασμούς σύμφωνα με το σχήμα:

$$\frac{\begin{array}{l}G \\ G \to I\end{array}}{I}$$

όπου κάθε προκείμενη, δηλ. οι τύποι G και G→ I της διάταξης, ή είναι αξίωμα ή είναι το αποτέλεσμα μιας αντικατάστασης μέσα σε ένα αξίωμα ή συμπίπτει με τον τελευταίο τύπο ενός προγενέστερου συμπερασμού ή προκύπτει από αυτόν με αντικατάσταση. Λέμε ότι ένας τύπος είναι αποδείξιμος, αν είναι ο τελευταίος τύπος μιας απόδειξης.

Το πρόγραμμά μας υποδεικνύει την επιλογή των αξιωμάτων για τη θεωρία της απόδειξης. Αν και η επιλογή των αξιωμάτων είναι ως ένα βαθμό αυθαίρετη , ωστόσο μπορούν να ταξινομηθούν σε ομάδες που διαφέρουν ποιοτικά, ακριβώς όπως στη γεωμετρία. Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

I. Αξιώματα της συνεπαγωγής:

(i) $A \to (B \to A)$

(εισαγωγή μιας παραδοχής)

(ii) $(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$

(απάλειψη μιας πρότασης)

II. Αξιώματα της άρνησης:

(i) $\{A \to (B \,\&\, \bar{B})\} \to \bar{A}$

(αρχή της μη αντίφασης)

(ii) $\bar{\bar{A}} \to A$

(αρχή της διπλής άρνησης).

Τα αξιώματα των ομάδων I και II δεν είναι παρά τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού.

III. Υπερπεπερασμένα αξιώματα:

(α)Α(α) $\rightarrow$ Α(b)

(συμπερασμός του επιμέρους από το καθόλου· αξίωμα του Αριστοτέλη)

(ii) $(\bar{a})\, A(a) \rightarrow (Ea)\, \bar{A}(a)$

(αν ένα κατηγόρημα δεν ισχύει για όλα τα άτομα, τότε υπάρχει ένα αντιπαράδειγμα)·

(iii) $(\bar{E}a)\, A(a) \rightarrow (a)\, \bar{A}(a)$

(αν δεν υπάρχει κανένα άτομο για το οποίο να ισχύει μία πρόταση, τότε η Πρόταση είναι ψευδής για κάθε α).

Σ’ αυτό το σημείο συναντάμε ένα αξιοσημείωτο γεγονός: όλα αυτά τα υπερπεπερασμένα αξιώματα μπορούν να παραχθούν από ένα μοναδικό αξίωμα που περιέχει τον πυρήνα του πιο πολυσυζητημένου αξιώματος της μαθηματικής γραμματείας, δηλ. το λεγόμενο αξίωμα της επιλογής:

(i’) Α(α) $\rightarrow$ Α(εΑ)

όπου το ε συμβολίζει τη συνάρτηση της υπερπεπερασμένης λογικής επιλογής[9].

Επιπλέον υπάρχουν ειδικά μαθηματικά αξιώματα:

IV. Αξιώματα της ισότητας:

(ι) α=α

(ii) $a = b \rightarrow \{A(a) \rightarrow A(b)$

και τέλος:

V. Αξιώματα των αριθμών:

(i) $a + 1 \neq 0$

και

(ii)το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής

$$[\{A(0)\,\&\,(x)(Ax)\rightarrow A(x^{'}))\}\rightarrow A(a)].$$

Μ’ αυτόν Τον τρόπο μπορούμε να αναπτύξουμε τη Θεωρία της απόδειξης και να οικοδομήσουμε το σύστημα των αποδείξιμων τύπων, δηλ. τη μαθηματική επιστήμη.

Ωστόσο, στη χαρά μας για το γεγονός ότι, γενικά, έχουμε πετύχει και, ειδικά, ότι βρήκαμε ήδη έτοιμο ένα απαραίτητο εργαλείο. τον λογικό λογισμό, δεν πρέπει να ξεχνάμε το ουσιαστικό ζητούμενο της μεθόδου μας. Γιατί υπάρχει μία συνθήκη, μοναδική αλλά απόλυτα αναγκαία, στην οποία υπόκειται η χρήση της μεθόδου των ιδεατών στοιχείων: Η απόδειξη της εσωτερικής συνέπειας, διότι επέκταση με την προσθήκη ιδεατών στοιχείων είναι νόμιμη μόνο αν δεν γεννά αντιφάσεις στο παλαιό και στενότερο πεδίο, δηλ. αν οι σχέσεις που προκύπτουν για τα παλαιά αντικείμενα, όταν απομακρύνουμε τις ιδεατές δομές, παραμένουν έγκυρες στο παλαιό πεδίο.

Ωστόσο, στην παρούσα περίπτωση είναι εύκολο να λύσουμε το πρόβλημα της εσωτερικής συνέπειας. Αυτό ανάγεται, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει αμέσως, στο να δείξουμε ότι, ξεκινώντας από τα αξιώματα και εφαρμόζοντας τους ισχύοντες κανόνες, δεν μπορούμε ως τελικό τύπο μιας απόδειξης να έχουμε τον «$1\neq 1$», ή με άλλα λόγια ότι ο «$1\neq 1$» δεν είναι αποδείξιμος τύπος. Αυτό το έργο ουσιαστικά ανήκει στην περιοχή της εποπτικής επεξεργασίας, το ίδιο ακριβώς όπως στην περιεχομενική θεωρία των αριθμών πρέπει, λ.χ.. να αποδείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, δηλ. ότι είναι αδύνατον να βρούμε δύο αριθμούς a και *b* που να ικανοποιούν τη σχέση $a^2=2b^2$ με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε δύο αριθμητικά σύμβολα που να έχουν μία ορισμένη

ιδιότητα. Αντιστοίχως, πρέπει να δείξουμε ότι είναι αδύνατον να γίνει ένα ορισμένο είδος απόδειξης. Αλλά μία τυποποιημένη απόδειξη είναι ένα συγκεκριμένο και εποπτεύσιμο αντικείμενο, όπως το αριθμητικό σύμβολο . Και μπορούμε να την περιγράψουμε πλήρως. Το ότι ο τελικός τύπος έχει την απαιτούμενη δομή είναι δηλαδή ο «$1 \neq 1$» , είναι επίσης μία ιδιότητα της απόδειξης και μπορεί να εξακριβωθεί με συγκεκριμένο τρόπο. Το ότι η απόδειξη μπορεί πραγματικά να δοθεί , αιτιολογεί την εισαγωγή των ιδεατών προτάσεων.

Συγχρόνως δοκιμάζουμε μία ευχάριστη έκπληξη, γιατί ανακαλύπτουμε ότι λύθηκε ένα πρόβλημα που από καιρό βασανίζει τους μαθηματικούς: το πρόβλημα του να αποδείξουμε την εσωτερική συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής. Γιατί όταν χρησιμοποιούμε την αξιωματική μέθοδο, παρουσιάζεται το πρόβλημα της απόδειξης της συνέπειας. Στο κάτω-κάτω, όταν επιλέγουμε, ερμηνεύουμε και χρησιμοποιούμε τα αξιώματα και τους κανόνες. δεν μπορούμε να βασιζόμαστε αποκλειστικά στην καλή πίστη ή την απλή εμπιστοσύνη. Στην περίπτωση της γεωμετρίας ή των φυσικών θεωριών, η απόδειξη της συνέπειας γίνεται με αναγωγή στην εσωτερική συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής. Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο και στην περίπτωση της αριθμητικής. Η θεωρία των αποδείξεων που προτείνουμε επιτρέπει να κάνουμε το τελευταίο και σημαντικό τούτο βήμα χάρη στη μέθοδο των ιδεατών στοιχείων· γι’ αυτό και αποτελεί τον θολίτη λίθο στο οικοδόμημα της αξιωματικής θεωρίας. Και αυτό που βιώσαμε δύο φορές, την πρώτη με τα παράδοξα του απειροστικού λογισμού και τη δεύτερη με τις αντινομίες της θεωρίας των συνόλων, δεν μπορεί να μας συμβεί και τρίτη φορά ούτε και ποτέ ξανά.

Η θεωρία της απόδειξης, που εδώ την παρουσιάσαμε σε γενικές γραμμές, όχι μόνο μπορεί να διασφαλίσει τα θεμέλια των μαθηματικών αλλά, όπως πιστεύω, ανοίγει ένα δρόμο που. αν τον ακολουθήσουμε, θα

μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε γενικά προβλήματα που έχουν θεμελιακό χαρακτήρα και ανήκουν στο πεδίο των μαθηματικών, προβλήματα που προηγουμένως δεν ήταν δυνατόν ούτε καν να τα πλησιάσουμε.

Τα μαθηματικά έγιναν κατά κάποιο τρόπο ένα δικαστήριο διαιτησίας, ένα ανώτατο δικαστήριο που θα αποφασίζει για ζητήματα αρχών — και με τόσο συγκεκριμένη δράση, ώστε να είναι δυνατή η γενική συμφωνία και να μπορούν να ελεγχθούν όλες οι βεβαιώσεις.

Ακόμα και οι βεβαιώσεις της πρόσφατης σχολής που ονομάζεται «ιντουισιονιστική», αν και όχι πολύ φιλόδοξες, πρέπει, κατά τη γνώμη μου, να εφοδιαστούν με ένα πιστοποιητικά εγκυρότητας, που μόνο αυτό το δικαστήριο μπορεί να εκδώσει.

Ως παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο μπορούμε να πραγματευθούμε θεμελιακά ζητήματα, θα ήθελα να διαλέξω τη θέση ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα επιδέχεται λύση. Όλοι μας το πιστεύουμε αυτό. Στο κάτω-κάτω ένα από τα βασικά κίνητρα που μας ωθούν να αντιμετωπίσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι ότι πάντοτε μέσα μας ακούμε τη φωνή: να το πρόβλημα, βρες τη λύση· μπορείς να τη βρεις με την καθαρή σκέψη γιατί στα μαθηματικά δεν υπάρχει ignorabimus (το αγνοείν) . Βέβαια η θεωρία της απόδειξης που προτείνω δεν μπορεί να δώσει μία γενική μέθοδο για τη λύση οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος· εξάλλου δεν υπάρχει τέτοια μέθοδος. Ωστόσο, η θεωρία μας είναι αρμόδια να αποδείξει πως η παραδοχή ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα επιδέχεται λύση είναι μη αντιφατική.

Θα ήθελα να χρησιμοποιήσω ακόμα, ένα τελευταίο πλεονέκτημα. Η τελική δοκιμή κάθε νέας θεωρίας είναι η επιτυχία της να απαντά σε ερωτήματα που προϋπήρχαν κάπου η θεωρία δεν αναπτύχθηκε ειδικά για να τα απαντήσει. Τα ερωτήματα θα τα γνωρίζετε από τους καρπούς τους - το ίδιο και τις θεωρίες. Μόλις ο Cantor ανακάλυψε τους πρώτους

υπερπεπερασμένους του αριθμούς, τους αριθμούς της δεύτερης αριθμητικής κλάσης όπως ονομάστηκαν, προέκυψε το ερώτημα, όπως έχω ήδη αναφέρει, αν με αυτή την υπερπεπερασμένη μέτρηση μπορούσε κανείς να αριθμήσει πραγματικά τα στοιχεία συνόλων , γνωστών σε άλλα πλαίσια, αλλά όχι αριθμήσιμων με τη συνηθισμένη έννοια. Το ευθύγραμμο τμήμα ήταν το πρώτο και πιο γνωστό σύνολο αυτού του είδους που τέθηκε υπό εξέταση. Αυτό το ερώτημα, αν τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, μπορούν να αριθμηθούν με τη βοήθεια των αριθμών του πίνακα που κατασκευάστηκε παραπάνω, είναι το περίφημο πρόβλημα του συνεχούς, που διατυπώθηκε αλλά δεν λύθηκε από τον **Cantor** . Μερικοί μαθηματικοί πίστευαν ότι μπορούσαν να απαλλαγούν από αυτό το πρόβλημα αρνούμενοι την ύπαρξή του. Η συζήτηση που ακολουθεί δείχνει πόσο λανθασμένη ήταν αυτή η στάση. Το πρόβλημα του συνεχούς διακρίνεται για την πρωτοτυπία και την εσωτερική ομορφιά του. Χαρακτηρίζεται, επιπλέον, από δύο στοιχεία που το αναδεικνύουν ανώτερο από άλλα φημισμένα προβλήματα: η λύση του απαιτεί νέους τρόπους, αφού οι παλιές μέθοδοι αποτυγχάνουν στην περίπτωσή του και επιπλέον, αυτή η λύση είναι αφ' εαυτής τεράστιου ενδιαφέροντος ως προς το αποτέλεσμα που πρόκειται να καθοριστεί.

Η θεωρεία που έχω αναπτύξει μια λύση του προβλήματος του συνεχούς ναι δυνατή αποτελεί το πρώτο και το σημαντικότερο βήμα προς τη λύση του [13] …………………………………………………………………

Ας αναλογισθούμε τέλος το πραγματικό μας αντικείμενο και σε ότι αφορά το άπειρο, ας ζυγοσταθμίσουμε τους συλλογισμούς μας. Το τελικό αποτέλεσμα δεν πραγματώνεται πουθενά ούτε είναι παρόν στην

---

13 Στο σημείο αυτό παραθέτει μια απόδειξη του προβλήματος του συνεχούς . Η προσπάθειά του αν και δεν στερείται ενδιαφέροντος , δεν έφερε αποτέλεσμα και το παραλείπουμε εδώ.

φύση , ούτε είναι αποδεκτό ως θεμελίωση της λογικής μας σκέψης-μια αξιοσημείωτη αρμονία ανάμεσα σε ύπαρξη και σκέψη. Κερδίζουμε μια βεβαιότητα που είναι αντίθετη με τις παλαιότερες προσπάθειες των **Frege** και **Dedekint** ότι δηλαδή, αν η επιστημονική γνώση μπορεί να είναι δυνατή , είναι αναπόφευκτες ορισμένες εποπτικές (ενορατικές) συλλήψεις. Η λογική από μόνη της δεν αρκεί. Το δικαίωμα να εργαζόμαστε με το άπειρο μπορεί να εξασφαλισθεί μόνο μέσα από το πεπερασμένο.

Ο ρόλος που απομένει στο άπειρο, είναι μόνο αυτός της μιας ιδέας, ανά και σύμφωνα με τα λόγια του Kant καταλαβαίνουμε με ιδέα μια λογική έννοια που υπερβαίνει όλη την εμπειρία και μέσω της οποίας το συγκεκριμένο ολοκληρώνεται ώστε να σχηματίζει μια ολότητα. –μιας ιδέας επιπλέον, στην οποία μπορούμε να έχουμε εμπιστοσύνη μέσα στα πλαίσια της θεωρίας που έχω εδώ σκιαγραφήσει και υπερασπισθεί.

Κλείνοντας , θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον P. Bernays για την συμπάσχουσα συνεργασία και την ανεκτίμητη βοήθεια που μου προσέφερε σε ερωτήματα τόσο μορφής, όσο και περιεχομένου και ειδικότερα στην απόδειξη του θεωρήματος του συνεχούς._

4. Οι αντιλήψεις του Hilbert για το άπειρο

Όπως προείπαμε , ο Hilbert διετύπωσε τις παραπάνω απόψεις στις 4 Ιουνίου του 1925 σε εκδήλωση συνάντηση της μαθηματικής εταιρείας της Βεστφαλίας , στην μνήμη του Weierstrass .

Προηγούμενα, είχε καταστεί φανερό, πως καμία θεμελίωση των μαθηματικών δεν θα ήταν ικανή να σταθεί στα πόδια της, αν προηγουμένως , δεν αποσαφηνιζόταν η έννοια του πραγματικού απείρου.

Τα παράδοξα της συνολοθεωρίας του Cantor είχαν κάνει την εμφάνισή τους, και ήδη είχαν ταλανίσει την μαθηματική κοινότητα , είχαν δημιουργηθεί συζητήσεις, αντιπαραθέσεις και ηράκλειες προσπάθειες για την άρση των αντινομιών που προήρχοντο από ενορατικές επεκτάσεις προτάσεων και ιδεών από τον χώρο του πεπερασμένου στον χώρο του απείρου.

Εδώ η διαίσθηση από μόνη της οδηγούσε σε σφάλματα….
Και ναι μεν ο Weierstrass -επ' ευκαιρεία της μνήμης του οποίου ομιλούσε ενώπιον του συμποσίου – είχε κατορθώσει να δαμάσει τρόπον τινά το άπειρο στον Απειροστικό λογισμό με την εισαγωγή των δ-εψιλοντικών ορισμών , αλλά βεβαίως πόρω απείχε από την πραγματική τιθάσευση του (αν ήταν –είναι δυνατή) αφού το άπειρο, σταθερά παρουσιάζεται λ.χ. στις άπειρες ακολουθίες Cauchy μέσω των οποίων ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί και οι οποίοι αποτελούν το όχημα του Απειροστικού λογισμού.

Σύμφωνα με τον Hilbert, για να δικαιωθεί οντολογικά η έννοια του απείρου , πρέπει να στραφούμε σε δύο πηγές:

Α)Στην φύση

Β) Στη νόηση

Αν ξεκινήσουμε από την φύση, η διαίρεση της ύλης δεν είναι ατέρμονη, καθώς έχομε όρια διαιρετότητάς της : Το μόριο, πέρα από το οποίο δεν έχει νόημα η διατήρηση των φυσικών ιδιοτήτων του υλικού που διαιρείται . Υπάρχει στην συνέχεια το άτομο, το ηλεκτρόνιο, όπως και τα σύγχρονα (τώρα, όχι τότε) υποατομικά σωματίδια τα κουάρκς που γίνονται αντιληπτά από τις συνέπειές τους. Βεβαίως, διαρκώς ανακαλύπτουμε νέα «εξωτικά» υποατομικά σωματίδια, αλλά η επ'

άπειρον διαιρετότητα της ύλης καθίσταται εξαιρετικά αμφίβολη. Κυριολεκτικά ανακαλύπτουμε ότι η ύλη εμπεριέχει απροσδόκητα , τεράστιους κενούς χώρους ανάμεσα στους δομικούς της λίθους. Αυτά στον μικρόκοσμο.

Στον μακρόκοσμο , η ύπαρξη απείρων στο πλήθος υλικών αντικειμένων είναι μάλλον αδύνατη. Οι κοσμολόγοι τείνουν να συμφωνήσουν ότι το σύμπαν είναι πεπερασμένο. Άρα κατά πάσα πιθανότητα (ίσως βεβαιότητα) το πραγματικά άπειρο δεν υπάρχει στην φύση.

Αν στραφούμε στην νόηση για να δικαιώσουμε την ύπαρξη του απείρου, τότε εκεί τα πράγματα είναι ανυπέρβλητα, καθώς ουδείς άνθρωπος είναι ικανός να προβεί σε οιουδήποτε είδους έλεγχο απείρων βημάτων ή να διακρίνει άπειρα μέρη σε αντικείμενο φυσικό ή νοητό(υπό την έννοια πάντα του διακριτού ελέγχου)

Αφού λοιπόν το πραγματικό άπειρο δεν φαίνεται να υπάρχει, ο Hilbert, προσπαθεί να οικοδομήσει μια φιλοσοφική θεωρία, όπου το περατοκρατικό του πρόγραμμα θα διασώσει το σώμα των κλασικών μαθηματικών και θα θεμελιωθεί σε ακλόνητα θεμέλια.

Σύμφωνα με τον ίδιο τον Hilbert , απαιτούνται γι’ αυτό , δύ ο πράγματα:

(i) Να ερευνηθούν οι τρόποι δημιουργίας νέων εννοιών , καθώς και οι συμπερασματικές διαδικασίες , οι οποίες θα μπορέσουν να αποδώσουν καρπούς στα πλαίσια του φορμαλισμού

(ii) Οι συμπερασματικές διαδικασίες που θα ακολουθηθούν , να είναι τόσο ασφαλείς και βέβαιες, όσο και οι αντίστοιχες που ακολουθούνται στα πλαίσια της στοιχειώδους Αριθμητικής.

Οι παραπάνω θέσεις αποτελούν ένα είδος απάντησης στο πρόβλημα αντιμετώπισης των παραδόξων που ήδη όπως προείπαμε ανεφύη 25

χρόνια πριν από την ομιλία του Hilbert .Ήδη, σύμφωνα με την πρώτη θέση του Hilbert, η ανεξέλεγκτη εισαγωγή νέων εννοιών θα πρέπει να αποφεύγεται. Επίσης, ο έλεγχος των όποιων εννοιών είναι υπό εισαγωγή θα πρέπει να έχει δύο σκέλη:

- Οι νέες έννοιες θα πρέπει να είναι γόνιμες.
- Οι νέες έννοιες δεν θα πρέπει να οδηγούν σε αντιφάσεις.

Σε περίπτωση που οδηγούν σε αντιφάσεις-και εφ' όσον είναι γόνιμες-θα πρέπει να τροποποιούνται, με τέτοιο τρόπο, ώστε να πάψουν να οδηγούν σε τερατογενέσεις. Λ.χ. η ύπαρξη των συνολοθεωρητικών παραδόξων , δεν θα πρέπει να μας οδηγήσει στην απόρριψη της συνολοθεωρίας, αλλά σε μια επιτυχή τροποποιησή της, κάτι που επιτυχέστατα έγινε με την κατά Zermero-Fraenkel θεωρία των συνόλων. Και όπως είπε ο Hilbert, «κανείς δεν θα μας εκδιώξει από τον Παράδεισο(της θεωρίας των συνόλων) που δημιούργησε ο Cantor για μας»

Ο Hilbert, έθεσε τις προϋοθέσεις , που θα οδηγούσαν σε στέρεη μαθηματική πρακτική. Σύμφωνα πάντα με τον ίδιο , αυτές θα έπρεπε να είναι οι εξής:

1. Θα πρέπει να δουλεύουμε με το πραγματικό άπειρο, με διαδικασίες που δεν το χρησιμοποιούν αυτό καθ' εαυτό, αλλά με διαδικασίες που ούσες ισοδύναμες με τις προηγούμενες, να το παρακάμπτουν κομψά, όπως ακριβώς οι εψιλοντικοί ορισμοί του Weierstrass για το όριο , παρακάμπτουν το άπειρο.
2. Για την χρήση κάποιας διαδικασίας, θα πρέπει να υπάρχουν στοιχειώδη νομιμοποιητικά κριτήρια. Αυτά – πάντα κατά Hilbert-πρέπει να είναι δύο ειδών:
    - Κριτήρια που θα οδηγούν σε εγγύηση ότι δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε αντιφάσεις

- Κριτήρια καθορισμού της γονιμότητας και επιτυχίας της χρησιμοποιούμενης διαδικασίας στην ολοκλήρωση του σκοπού ή και του προγράμματος για το οποίο χρησιμοποιήθηκε.

3. Οι λογικές συμπερασματικές διαδικασίες θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με φειδώ, και μόνον όταν η μαθηματική μας διαίσθηση επιτρέπει τον πλήρη έλεγχο των εννοιών που διασυνδέονται αποδεικτικά.

5. *Σχετικά Με Το Άπειρο Του David Hilbert*[14]

Την 4η Ιουλίου του 1925 ο David Hilbert έδωσε μια διάλεξη στο συνέδριο της μαθηματικής εταιρίας του Westphalian προς τιμήν του Karl Weierstrass. Το αντικείμενό του ήταν *Το Άπειρο*, και πιο συγκεκριμένα, η ιδέα των «λογικών προϊόντων του απείρου» δηλαδή των διαζεύξεων οι οποίες περιέχουν απείρως πολλές ενότητες. Στην πορεία προέκυψαν και άλλα ζητήματα όπως η ύπαρξη του απείρου στη φύση και ο μαθηματικός φορμαλισμός (αυστηρή προσκόλληση σε προκαθορισμένες μορφές)

Στην αρχή της εργασίας του ο Hilbert δηλώνει ότι «η σημασία του απείρου ποτέ δεν έχει διευκρινιστεί πλήρως». Σχετικά με αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι ο Dedekind στην εργασία του «Η Φύση Και Η Σημασία των Αριθμών», η οποία δημοσιεύτηκε το 1901, ορίζει ως «άπειρο σύνολο»αυτό το οποίο μπορεί με δύο τρόπους να χαρτογραφηθεί σε ένα

[14] Το παρακάτω κείμενο αποτελεί μέρος μιας σειράς διαλέξεων που έδωσε ο Tim Eyre στο πανεπιστήμιο με τίτλο «*Οι Βάσεις των μαθηματικών*» το 1994.

ορισμένο μέρος του ιδίου(του συνόλου)’. Αυτό φυσικά δεν έρχεται σε αντίθεση με την διαισθητική μας ιδέα για ένα άπειρο σύνολο και μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει τις «άπειρες αποστάσεις» και την «αιωνιότητα» χωρίς μεγάλη δυσκολία. Για παράδειγμα άπειρη απόσταση μπορεί να θεωρηθεί αυτή η οποία έχει ευδιάκριτη μία ίντσα (ή ένα εκατοστό ή ένα έτος φωτός) για κάθε στοιχείο ενός άπειρου συνόλου. Δεν είναι ωστόσο συνηθισμένο να χρησιμοποιούμε αυτό τον ορισμό επειδή συνήθως δεν σκεφτόμαστε το άπειρο με αυτό τον τρόπο. Δημιουργείται η εντύπωση ότι πρόκειται περισσότερο για ιδιότητα ενός συνόλου που δεν έχει πέρας. Αποτελεί έναν καλό ορισμό αλλά δύσκολα θα θεωρούνταν διευκρίνηση. Μπορούμε να πούμε ότι κατά κάποιο τρόπο μας προειδοποιεί για τους κινδύνους που φέρει η προσέγγιση του απείρου.

Στο σημείο αυτό ο Hilbert αρχίζει να θίγει την κεντρική ιδέα της διάλεξής του. Ενώ παραμερίζουμε το άπειρα μεγάλο και μικρό στην ανάλυση, εξακολουθούμε να κάνουμε προτάσεις για τα άπειρα σύνολα των ενοτήτων και συγκεκριμένα για τα άπειρα σύνολα των αριθμών όπως οι πραγματικοί και οι λογικοί. Αυτό, ισχυρίζεται ο Hilbert, δεν είναι κάτι που επιχειρούμε ευθέως. Το άπειρα μεγάλο, διατείνεται, είναι «απλώς σχήμα λόγου» και τέτοια πρέπει να είναι και η ιδέα του «άπειρου συνόλου» όπως οι πραγματικοί. Τέτοιες διαδικασίες πρέπει να είναι πεπερασμένες, όπως ήταν και το άπειρα μεγάλο και μικρό στην ανάλυση.

Το επιχείρημα που δίνεται για αυτή την αντικατάσταση είναι ότι το μαθηματικό έργο που επετεύχθη χρησιμοποιώντας το άπειρο απεδείχθη πολύ παράδοξο και επομένως η χρησιμοποίηση του απείρου με ένα λογικό πλαίσιο είναι καταδικασμένη να οδηγήσει σε παραλογισμούς. Το επιχείρημα αυτό είναι όντως φτωχό. Δεν υπάρχει κανένα καλά γνωστό πρόβλημα το οποίο να συνδέεται με τον υπαρξιακό, ποσοτικό προσδιορισμό των άπειρων «περιοχών». Ο Hilbert ο ίδιος έδειξε στην

ίδια διάλεξη ότι εάν διατηρήσουμε τη λογική πεπερασμένη , οι γενικές δηλώσεις δεν μπορούν να επιδεχθούν άρνηση. Σίγουρα αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μία «φυσική» κατάσταση των πραγμάτων. Πολλά παράδοξα προέκυψαν όταν το άπειρο χρησιμοποιήθηκε στην απειροστικό λογισμό , δικαιολογώντας έτσι την μελέτη του Weierstrass. Από τον υπαρξιακό, ποσοτικό προσδιορισμό δεν έχει προκύψει κάποιο πρόβλημα ακόμα οπότε και δεν χρειάζεται τροποποίηση- («εάν κάτι δεν χαλάσει, μην το φτιάξεις»)

Πρέπει να παραδεχθούμε ωστόσο πως ό,τι είναι ή δεν είναι «εμφανές» πρέπει σε κάποιο σημείο να γίνει ζήτημα άποψης. Αυτό είναι ένα δυσάρεστο, ασήμαντο πρόβλημα το οποίο ευτυχώς δεν αποτελεί ιδιαίτερο ζήτημα. Μπαίνουμε στα χωράφια της ψυχολογίας και θα έπρεπε να το αποφύγουμε.

Αυτό μας φέρνει σε ένα πολύ ενδιαφέρον κομμάτι της διάλεξης. Ο Hilbert υποστηρίζει σε διάστημα μερικών παραγράφων ότι τίποτα στη φύση δεν είναι άπειρο. Αυτό αναμφίβολα είναι ένας παρακινδυνευμένος ισχυρισμός. Ακόμη και σήμερα εβδομήντα χρόνια μετά, δεν μπορούμε να δώσουμε μια σίγουρη απάντηση στο ζήτημα αυτό. Η κβαντική μηχανική μας ωθεί, με κάποια βεβαιότητα να πιστέψουμε πως δεν υπάρχει τίποτα που να είναι άπειρα μικρό. Ωστόσο η κβαντική μηχανική χρησιμοποιεί ως επί το πλείστον διαφορικές εξισώσεις , οι οποίες προϋποθέτουν ότι ο χρόνος στη φύση είναι συνεχής. Έτσι λοιπόν κάποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει πως υπάρχει ένας άπειρος αριθμός «στιγμών» το δευτερόλεπτο, αφού στην έρευνα μας για το φυσικό άπειρο δεν περιοριζόμαστε μόνο σε «μήκη». Με το να αρνούμαστε ότι ο χρόνος είναι συνεχής , αρνούμαστε την εγκυρότητα του θεμελιώδους εργαλείου της κβαντικής μηχανικής και ως εκ τούτου χάνουμε την επιστημονική απόδειξη ότι τίποτα δεν είναι άπειρα μικρό. Με δεδομένη την τεράστια επιτυχία της κβαντικής μηχανικής, φαίνεται ότι είτε ο χρόνος είναι

συνεχής είτε έχει μία φύση που είναι συνεχής για «πρακτικούς λόγους», έτσι ώστε οι διαφορικές εξισώσεις να επιτυγχάνουν μία εκπληκτικά ακριβή προσέγγιση της πραγματικότητας. Είναι σαφώς ενδιαφέρον να βλέπουμε το ξεχωριστό να προσεγγίζεται από το συνεχές και όχι από τον αντίστροφο, όπως συμβαίνει συνήθως. Αξίζει να σημειώσουμε ότι έχουν γίνει εκτιμήσεις που υποστηρίζουν ότι κανένα χρονικό διάστημα μικρότερο από 10^{-24} sec δεν θα μπορέσει ποτέ να μετρηθεί πειραματικά.

Όσο για το άπειρα μεγάλο, αυτό είναι πολύ λιγότερο σίγουρο. Παρά τις τεράστιες προόδους της αστρονομίας, η τοπολογία του σύμπαντος παραμένει μυστήριο. Φαίνεται όντως απίθανο το σύμπαν να είναι άπειρο, όμως αυτό δεν αποδεικνύεται με κανένα μέσο. Ο Hilbert ήταν ένας σεβαστός φυσικομαθηματικός και δεν θα μπορούσε χωρίς σκέψη να κάνει τόσο βιαστικούς ισχυρισμούς όσο αυτός. Ωστόσο καλό θα ήταν η μη-ύπαρξη του φυσικού απείρου να θεωρηθεί μεταμαθηματικό αξίωμα και όχι γεγονός.

Εάν είναι σημαντικό το ότι το άπειρο δεν υπάρχει στη φύση, μήπως δεν θα έπρεπε να θεωρούμε ότι τα παράλογα και ακόμη και τα λογικά δεν υπάρχουν πραγματικά στον αληθινό κόσμο; Από μία κβαντική άποψη, εάν αποστάσεις, μάζες και (πιθανώς) χρόνοι μετρηθούν σε δεόντως μικρές μονάδες, θα δώσουν (θεωρητικώς) ακέραια μεγέθη. Η μέτρηση ενός πραγματικού αριθμού μπορεί να καταστεί ακέραιη αν διαλέξουμε μία πιο κατάλληλη μονάδα μέτρησης, οι άλογες αποστάσεις (ασύμμετρων αριθμών) απλώς δεν υπάρχουν. Ποτέ κανείς δεν έχει καταφέρει να σχεδιάσει μία τέλεια μονάδα κύκλου ή ένα τέλειο τρίγωνο με $\sqrt{2}$ την υποτείνουσά του. Από την οπτική γωνία της «πραγματικότητας», τα λογικά και τα άλογα είναι ακριβώς τόσο μη-υπάρχοντα όσο και το άπειρο, μόνο η ενστικτώδης αντίληψή μας για αυτά με την διανοητική έννοια είναι καλύτερη. Επιπλέον το γεγονός ότι κάτι υπάρχει στη φύση δεν συνιστά ότι γίνεται και διαισθητικώς

αντιληπτό. Ένα ηλεκτρόνιο είναι σίγουρα αληθινό, όμως πολύ λίγοι άνθρωποι αντιλαμβάνονται την πραγματική του φύση, και μόνο σε σχέση με μαθηματικές εξισώσεις. Από την άλλη πλευρά οι περισσότεροι άνθρωποι μέσης νοημοσύνης καταφέρνουν να κατανοήσουν την ιδέα των άλογων αριθμών[15] οι οποίοι πραγματικά δεν μπορούν να υπάρξουν.

Φαίνεται ότι το πραγματικό πρόβλημα που προκύπτει κατά την προσέγγιση της έννοιας του απείρου είναι το εξής. Έχουμε μία καλή ενστικτώδη αντίληψη «μη πραγματικών» αντικειμένων , όπως είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί γιατί αποτελούν το φυσικό τρόπο να σκεφτόμαστε για τον κόσμο που μας περιβάλλει. Ό,τι ξέρουμε για την πραγματική φύση του κόσμου είναι έντονα ενστικτώδες, απείρως διαφορετικό από αυτό που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε «ενστικτώδη άποψή» μας. Το άπειρο από την άλλη πλευρά δεν έχει θέση στη *μέση* αντίληψή μας για τον κόσμο, αλλά αποτελεί επέκτασή του, ασχέτως με το αν υπάρχει στη φύση ή όχι. Για παράδειγμα αντιλαμβανόμαστε τους φυσικούς αριθμούς γιατί βλέπουμε γύρω μας αριθμούς πραγμάτων. Κατανοούμε πως δεν υπάρχει λόγος να υπάρχει «ένα περισσότερο» από τον οποιοδήποτε δοθέντα αριθμό και έτσι οδηγούμαστε στην σύλληψη του πρώτου απείρου, στο θεμελιώδες σύνολο των φυσικών αριθμών. Ομοίως, σκεφτόμαστε μια γραμμή ως συνεχή- είναι απλώς ο φυσικός τρόπος για μας να σκεφτόμαστε. Έτσι οδηγούμαστε να επινοήσουμε τους πραγματικούς-ένα άλλο άπειρο.

Επειδή δεν μπορούμε πάντα να δίνουνε εικόνα σε ό,τι αντιλαμβανόμαστε, προκύπτουν παράδοξα αν δεν είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Κατά τον ίδιο τρόπο, οι υψηλότερες διαστάσεις αποτελούν, αν και λιγότερο πιθανή, απειλή. Από την αντίληψή μας για τον πραγματικό κόσμο συλλαμβάνουμε μια τέταρτη διάσταση. Αν δεν

15

φανούμε ιδιαίτερα προσεχτικοί στην έρευνά μας για το άπειρο και για άλλες παρόμοιες ιδέες, πολλά παράδοξα θα κάνουν την εμφάνισή τους.

Στο σημείο αυτό συμφωνούμε με την παρατήρηση που έκανε ο Hilbert αρχίζοντας την ενασχόλησή του με το φυσικό άπειρο. Δηλώνει ότι «καμία άλλη ιδέα δε χρειάζεται περισσότερη διευκρίνηση από την έννοια του απείρου.» Όπως είδαμε αυτό συμβαίνει όχι επειδή δεν υπάρχει αλλά επειδή δεν αποτελεί κομμάτι της σύλληψής μας για τον κόσμο. Σε κανένα σημείο δεν μας λέει ο Hilbert γιατί η μη ύπαρξη του φυσικού απείρου είναι σημαντική. Το 1825 ο Ρώσος μαθηματικός Lobachevsky έδειξε ότι το αξίωμα του Ευκλείδη που λέει: «δοθείσης μίας ευθείας γραμμής (ε) και ενός σημείου Α εκτός αυτής , υπάρχει μία ευθεία που περνάει από το Α και είναι παράλληλη της (ε)» μπορεί να αντικατασταθεί με το εξής: «δοθείσης μίας ευθείας γραμμής (ε) και ενός σημείου Α εκτός αυτής , υπάρχουν δύο ευθείες που περνάνε από το σημείο Α και είναι παράλληλες στην (ε)» χωρίς να παραβιάζει τη συνέπεια ολόκληρου του συνόλου των αξιωμάτων και χωρίς να παραβιάζει τη φυσική ιδιότητα του χώρου δεδομένου ότι οι δύο γραμμές ήταν επαρκώς κοντά η μία με την άλλη ώστε να διαψεύσει την μέτρηση ανάμεσά τους.

Ο Hilbert συνεχίζει λέγοντας ότι «το άπειρο καταλαμβάνει ένα δικαιολογημένο μέρος της σκέψης μας». Αυτό είναι αναμφίβολα αλήθεια. Έχουμε μια ενστικτώδη ιδέα του τι σημαίνει άπειρο. Δεν πρέπει να εγκαταλείψουμε μια τόσο ελκυστική ιδέα. Πρέπει να την κυνηγήσουμε κατά το δυνατό, να την δαμάσουμε και να προσπαθήσουμε να την κατανοήσουμε πλήρως.

Έπειτα θίγει τα «ιδανικά στοιχεία», δηλώνοντας πρωτίστως ότι «Τα σημεία και οι ευθείες γραμμές ενός επιπέδου είναι πραγματικά, πραγματικά υπάρχοντα αντικείμενα.» Είναι παράξενο το γεγονός ότι τα χαρακτηρίζει έτσι , δεδομένων των τελευταίων παραγράφων στις οποίες

πραγματευόταν την πραγματική φύση του σύμπαντος. Ενώ η πραγματική του φύση δεν είναι βεβαία, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι σε καμία περίπτωση δεν είναι κάτι σαν τη γεωμετρία του Ευκλείδη και το ότι αναφερόμαστε στα σημεία και τις γραμμές ως «αληθινές» είναι, αν όχι τίποτα άλλο, λιγότερο δικαιολογημένο από το να αναφερόμαστε στο άπειρο ως «πραγματικό», γιατί θα πρέπει ακόμα να αποδείξουμε επιστημονικά αν το σύμπαν είναι αληθινό ή όχι.

Τα ιδανικά στοιχεία εισάγονται με τη χρήση της επίπεδης γεωμετρίας και των σημείων που κάποιος θα εισήγαγε στο άπειρο ώστε να βελτιώσει την κομψότητα στα θεωρήματα. Οι μιγαδικοί αριθμοί αναφέρονται επίσης ως επέκταση της «πραγματικότητας» και το θεμελιώδες σύνολο των φυσικών αριθμών περιγράφεται ως ένας «ιδανικός αριθμός». Εδώ βλέπουμε μία μαθηματική αδεξιότητα από τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί στις αρχές του αιώνα. Δεν θεωρούμε πλέον τους πραγματικούς αριθμούς περισσότερο «πραγματικούς» από τους μιγαδικούς αριθμούς. Κατά τη σύγχρονη θεώρηση αποτελούν και οι δύο μαθηματικές κατασκευές οι οποίες ορίσθηκαν και φτιάχτηκαν με καμία απολύτως αναφορά στην πραγματικότητα όπως και όλες οι υπόλοιπες μαθηματικές κατασκευές. Αυτή η σύγχυση αποτελεί περισσότερο μια αντανάκλαση της λιγότερο ώριμης φύσης των μαθηματικών την εποχή εκείνη παρά μομφή για τον ίδιο τον Hilbert. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η διάλεξη αργότερα δεν αφήνει καμία απορία για τη φύση των αξιωμάτων, «….[αξιώματα] παρ' ότι αρχικά θεωρήθηκαν αφελώς ως βασικές αλήθειες, έχουν για πολύ καιρό αντιμετωπισθεί…..ως σχέσεις μεταξύ των εννοιών.» Αυτός είναι ο τρόπος σκέψης που μας οδήγησε στη σύγχρονη θεώρηση των μαθηματικών.

Ο Hilbert έπειτα προχωρά στην εξέταση του απείρου σε σχέση με την ανάλυση. Σημειώνει πώς ο κόσμος συνειδητοποίησε πόσο βασικά

διαφέρουν το άπειρο και το πεπερασμένο, αλλά επισημαίνει ότι η ανάλυση δεν περιγράφει πλήρως το άπειρο. Και πρέπει να συμφωνήσουμε. Ακόμα και η σύγχρονη ανάλυση δεν κάνει τίποτα περισσότερο απ’ το να αντιμετωπίζει το άπειρο και να το χρησιμοποιεί. Ουσιαστικά δεν μελετά το άπειρο. Όπως λέει ο Hilbert την βάση για να γίνει αυτό, την έθεσε ο Cantor.

Λιγότερα εύλογα, υποστηρίζεται ότι η ανάλυση εξετάζει το άπειρο μόνο ως περιορισμένη ιδέα, αυτό που αποκαλεί «πιθανό(;) άπειρο» . Μπορούμε να πούμε ότι αυτή είναι και η προσέγγιση που έκανε ο Cantor στους ορισμούς του για τα διάφορα είδη απείρων. Το w περιγράφεται από τον Zermelo ως ‘περιορισμένο von Neuman τακτικό αριθμητικό[16].’ Ο Hilbert ίσως έχει κάποιο δίκιο αλλά αυτό δεν θα πρέπει να επηρεάσει βαθιά την σκέψη μας για το άπειρο.

Στη συνέχεια της διάλεξης περιγράφονται κάποια αποτελέσματα για το άπειρο(υπάρχουν τόσοι ρητοί όσοι και φυσικοί, υπάρχουν τόσα σημεία στο [0,1] όσα και σε μία μονάδα κύβου αλλά υπάρχουν «λιγότεροι» φυσικοί αριθμοί απ’ ότι τα σημεία στο [0,1]. Οδηγούμαστε μέσα από τις βάσεις της μελέτης του Cantor, στο καταστροφικό παράδοξο των Zermelo-Hilbert και τη στρατηγική που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να σώσουμε αυτή την εμφανώς λαμπρή επινόηση.

Όπως συμβαίνει, ο Zemelo τακτοποίησε τα σχετιζόμενα προβλήματα αρκετά προσεχτικά πέντε χρόνια αργότερα. Η εργασία του «Σχετικά με τους απρόσιτους αριθμούς και τα σύνολα των περιοχών»[17] έδωσε μία συγκροτημένη και χωρίς παράδοξα εικόνα της θεωρίας των συνόλων σε ένα τρίο ‘Αποκαλυπτικών Θεωρημάτων’. Το μόνο πρόβλημα που παρέμεινε ήταν το «τί είναι σύνολο;» Φυσικά εξαιτίας

[16] Πρέπει να εννοεί «διατακτικό αριθμό»

[17] δεν κατέστη δυνατόν να αποδοθεί καλύτερα

αυτού δε αδιαφορούμε για το υπόλοιπο της διάλεξης του Hilbert. Περιγράφει την εργασία του Cantor για να μας διαφωτίσει καλύτερα σχετικά με τη φύση του απείρου και να μας προετοιμάσει για το τέλος της διάλεξης όπου ισχυρίζεται ότι το σύστημα που περιγράφει του επιτρέπει να λύσει την υπόθεση συνέχειας του Cantor

Εν συνεχεία ο Hilbert θρηνεί για τα προβλήματα που εγγενώς σχετίζονται με το άπειρο, και διερωτάται «μπορεί η σκέψη να απομακρυνθεί τόσο πολύ από την πραγματικότητα;» Σε σχέση με ό,τι συζητήθηκε προηγουμένως εκτενώς, η απάντηση πρέπει να είναι «ναι». Τα μαθηματικά εξελίχθηκαν από πράγματα όπως τα σχέδια των αιγυπτιακών κτιρίων όπου κομμάτια σχοινιών εξιδανικεύονταν σε γραμμές. Η ευκλείδεια επίπεδη γεωμετρία έχει τις ρίζες της στο γεγονός ότι για τους καθημερινούς σκοπούς η Γη είναι επίπεδη. Τώρα ξέρουμε ότι η Γη είναι σφαιρική αλλά αυτό δε μας κάνει να αντικαταστήσουμε την ευκλείδεια γεωμετρία με σφαιρική (ή ακόμα και σχεδόν σφαιρική) γεωμετρία. Ο τρόπος που σκεφτόμαστε για τον κόσμο διαφέρει άπειρα από τον τρόπο που όντως είναι φτιαγμένος. Το απλό γεγονός ότι η φυσική αποτελεί ένα δύσκολο αντικείμενο μαρτυρεί ακριβώς αυτό. Οι σύγχρονες απόψεις για τον κόσμο, βασισμένες στη μηχανική της σχετικότητας και στην κβαντική μηχανική, μας δείχνουν ότι η πραγματικότητα είναι πάρα πολύ δύσκολη για μας να την σκεφτούμε πόσο μάλλον να προσπαθήσουμε να την διαμορφώσουμε σε μαθηματικές σχέσεις.

Συνεχίζει με την ερώτηση «Μήπως η ουσιαστική επαγωγή μας προδίδει όταν εφαρμόζεται σε αληθινά πράγματα ή γεγονότα;» και απαντάει πως δεν μας προδίδει, αυτή η λογική μας εξαπατά μόνο όταν εφαρμόζεται σε αφηρημένες καταστάσεις που δημιουργήθηκαν απερίσκεπτα. Η λογική δεν μπορεί να μας φέρει σε λάθος συμπεράσματα, η λογική είναι η επιστήμη των απαραίτητων συμπερασμάτων. Η λογική

φαίνεται να παράγει παράδοξα , όταν είμαστε απερίσκεπτοι με τους αφηρημένους ορισμούς μας. Το λάθος βρίσκεται στους ορισμούς και όχι στην λογική.

Αυτό είναι ένα σημείο ελάσσονος σημασίας και με ευκολία συμφωνούμε με τον Hilbert όταν λέει πως η τόσο στενή προσήλωση σε αφηρημένους ορισμούς συμφωνεί με τη θεωρία ορισμένων φιλοσόφων,.. ενδεικτικώς του Καντ «….τα μαθηματικά ασχολούνται με ένα αντικείμενο-ζήτημα, που δίνεται ανεξαρτήτως λογικής. Αυτό που ουσιαστικά λέει ο Καντ είναι ότι τα μαθηματικά συνίστανται από «συνθετικές a priori κρίσεις». Οι φιλόσοφοι ερμηνεύουν τις κρίσεις αυτές ως μη λογικές αλήθειες (συνθετικές), οι οποίες επίσης διαμορφώνονται ανεξάρτητα από την εμπειρία (a priori). Με άλλα λόγια στα μαθηματικά είμαστε λογικοί αλλά χρειαζόμαστε κάτι για το οποίο να είμαστε λογικοί. Η λογική μας για οτιδήποτε, είτε υλικό είτε αφηρημένο, είναι καλοδεχούμενη εάν όμως δεν δείξουμε ιδιαίτερη προσοχή στους αφηρμένους ορισμούς μας θα καταλήξουμε σε παράδοξα . Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε πως ο Καντ θεωρείται ο πατέρας του Ιντουϊσιονισμού, μιας μεθόδου σκέψης που διαφέρει από το Φορμαλισμό κατά κάποιους σημαντικούς τρόπους, για παράδειγμα ο Ιντουϊσιονισμός απέρριψε τα κλασσικά μαθηματικά ως επιφανειακά ξεκάθαρα.

Ο Hilbert συνεχίζει λέγοντας ότι εάν η λογική μας αιτιολογία με αυτά τα συνθετικά αντικείμενα είναι βεβαία, πρέπει να μπορούμε να «δούμε κάθε άποψη αυτών των αντικειμένων.» Δεν είναι βέβαιο τι προσπαθεί να πει σε αυτό το σημείο. Εάν μπορούμε να δούμε κάθε άποψη μιας μαθηματικής ενότητας, δεν υπάρχει λόγος να εφαρμόσουμε μαθηματικά σ’ αυτή αφού οτιδήποτε για αυτή, θα είναι από την πρώτη στιγμή ξεκάθαρο. Ίσως ο Hilbert εννοεί ότι η φύση ανεξάρτητων ενοτήτων πρέπει να είναι εντελώς ξεκάθαρη και όταν μελετούμε τις

σχέσεις μεταξύ τους αναφορικά με άλλες εντελώς ξεκάθαρες ενότητες (σύνολα και λειτουργίες π.χ.)

Ο επόμενος ισχυρισμός του είναι ότι «το αντικείμενο των μαθηματικών είναι…τα συγκεκριμένα σύμβολα αυτά καθ' εαυτά». Στην άποψη αυτή αντανακλάται η ανωριμότητα των μαθηματικών της εποχής εκείνης. Η σύγχρονη άποψη των μαθηματικών βρίσκεται σε σχέση με τον ορισμό αληθείας του Tarski . Ποτέ δεν γράφουμε τις μαθηματικές μας ενότητες[18]. Βασικά ποτέ δεν τις γράψαμε, μόνο από τον Tarski και μετά έχουμε όντως συνειδητοποιήσει τι «κάνουμε» όταν εκτελούμε μαθηματικά.

Εδώ βλέπουμε την ιδέα του Hilbert για τα μαθηματικά η οποία ήταν ιδιαίτερα έκδηλη στο «Φορμαλιστικό Πρόγραμμα του Hilbert». Σε αυτό απλώς γράφουμε τον τρόπο που συντάσσονται τα σύμβολα και διαβάζουμε σ' αυτόν ό,τι θέλουμε. Αποδείξεις θα επιτυγχάνονταν με το να μεταχειριστούμε τα σύμβολα κατά τέτοιο τρόπο που να μιμείται τον τρόπο που σκεφτόμαστε, αλλά χωρίς επίσημα να σημαίνει κάτι. Το θεώρημα του Goedel κατατρόπωσε την ιδέα αυτή, αλλά το μήνυμα της διάλεξής ως σύνολο δεν επηρεάστηκε σοβαρά. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο Henri Poincare (π. 1912) πάντα διατεινόταν πως η μαθηματική σκέψη πρέπει πάντα να συμπεριελάμβανε a priori σκέψη η οποία δεν συνίσταται σε αυστηρά λογικούς νόμους.

Η επόμενη παράγραφος μιλά για το ρόλο της θεωρίας του διατακτικού αριθμού στα μαθηματικά ως σύνολο. Διατείνεται πως η θεωρία αυτή «μπορεί να κατασκευαστεί από αριθμητικές διατάξεις μέσα από διαισθητικούς ουσιώδεις συλλογισμούς». Επιστρέφουμε στον πραγματικό κόσμο πάλι, αυτή τη φορά πιο δικαιολογημένα. Μέχρι σήμερα ξέρουμε ότι τρία μολύβια είναι τρία μολύβια, παρά τις θεωρίες

του Schoedinger και του Einstein. Εδώ η λογική συμπίπτει με την πραγματικότα που αντιλαμβανόμαστε και γι' αυτό δεν προκύπτουν παράδοξα.

Συνεχίζει δηλώνοντας πως τα μαθηματικά «σίγουρα δεν συνίστανται μόνο σε αριθμητικές εξισώσεις», πράγμα το οποίο πρέπει να είναι αλήθεια. Κανείς ποτέ δεν θα αναγκάσει τους μαθηματικούς να εγκαταλείψουν τη γεωμετρία και την ανάλυση επειδή δεν είναι «πραγματικές». Κατά κάποιο τρόπο χρειαζόμαστε να δικαιολογούμε την εισαγωγή πραγμάτων πέρα απ' την πραγματικότητα στα μαθηματικά, αλλά φοβόμαστε μήπως προκύψουν παράδοξα.

Ο Hilbert επιχειρεί να σώσει την κατάσταση υποδεικνύοντας ότι τα μαθηματικά θα μπορούσαν να είναι «μια συσκευή η οποία όταν θα εφαρμόζεται σε ακέραιους θα δίνει σωστές αριθμητικές εξισώσεις.» Αυτό δεν μας βοηθάει ιδιαίτερα. Μεγάλο τμήμα των μαθηματικών ούτε κατ' υποψίαν δεν επεξεργάζεται ως διακριτό. Οι αμέτρητες άπειρες ομάδες για παράδειγμα. Είναι ξεκάθαρο ωστόσο ότι τα μαθηματικά μας αποτελέσματα πρέπει να είναι σωστά όταν τα εφαρμόζουμε σε ακέραιους

.

Ο Hilbert συνεχίζει υποστηρίζοντας πως το πρόβλημά μας είναι να φροντίσουμε να έχουμε πάντα σωστές εξισώσεις και πως αυτό πρέπει να το επιτυγχάνουμε χρησιμοποιώντας μόνο πεπερασμένες μεθόδους. Ισχυρίζεται πως αυτό έχει γίνει. Δέκα χρόνια αργότερα ο Tarski απέδειξε πως η αλήθεια στην αριθμητική δεν μπορεί να οριστεί με αριθμητική. Ενώ αυτό δεν αποτελεί αντίστροφη πρόταση στον ισχυρισμό του Hilbert, σίγουρα προκαλεί αμφιβολίες.

Η διάλεξη συνεχίζει να εξετάζει την θεωρία των αριθμών με μεγαλύτερη λεπτομέρεια και εισάγει μία ειδική «πεπερασμένη μεταβλητή», ένα γοτθικό γράμμα που αντιπροσωπεύει έναν και μόνο

---

[18] Ίσως εδώ να μην είναι επιτυχής η απόδοση.

έναν ακέραιο κάθε φορά, κάτι σαν την «ελέυθερη μεταβλητή» της επίσημης γλώσσας. Δίνεται ένα απλό παράδειγμα μίας μη πεπερασμένης προθέσεως: «εκεί υπάρχει ένας πρώτος μεγαλύτερος από p». Δεν είναι πεπερασμένος επειδή διεκδικεί κάτι ακέραιο μέσα στον άπειρο αριθμό των ακεραίων που είναι μεγαλύτεροι του p. Η δήλωση «υπάρχει ένας πρώτος ανάμεσα από τον p και τον p!+1» είναι σωστή, εμπεριέχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό των ακεραίων. Αυτή η κίνηση προς το άπειρο ισχυρίζεται πως «δεν είναι περισσότερο επιτρεπόμενη από την επέκταση των πεπερασμένων και άπειρων προϊόντων στο λογισμό. Συνεπώς τέτοιες δηλώσεις συνήθως ολισθαίνουν σε κάτι μη σκόπιμο. Ο Poincare είχε παρόμοιους ενδοιασμούς για τέτοια λογικά προϊόντα.

Έχω ήδη εκφράσει την άποψη μου γι' αυτό, πιστεύω ότι δεν είναι μία αρκετά καλή δικαιολογία ώστε να προσπαθήσουμε να επινοήσουμε ένα καινούργιο τρόπο μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο ποτέ καμία αιτία δεν είναι αρκετά καλή για να μην εξετάζουμε έναν τμήμα των μαθηματικών. Στη χειρότερη περίπτωση θα βεβαιωθούμε ότι δεν υπήρχε λόγος να ασχοληθούμε.

Έπειτα εξετάζεται η ακριβής φύση της πεπερασμένης λογικής. Οι δισταγμοί μας για τον υπαρξιακό ποσοτικό προσδιορισμό σε σχέση με ένα άπειρο χώρο μας εμποδίζει να αρνηθούμε σχέσεις τέτοιες όπως α+1=1+α. Έτσι υποθέτοντας tetrium non datum (κάθε δήλωση είναι είτε σωστή είτε λάθος, μια υπόθεση που ουσιαστικά αρνήθηκαν οι υποστηρικτές του Ιντουϊσιονισμού), δεν μπορούμε να πούμε ότι η σχέση ισχύει για κάθε αριθμό ούτε μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει παράδειγμα ως αντίποδας.

Αυτή είναι σαφώς μια έντονα μη ικανοποιητική κατάσταση πραγμάτων. Οι λογικοί μας νόμοι θα γίνουν ιδιαίτερα περίπλοκοι και πλήρως αφύσικοι. Οι μαθηματικοί δεν θα σταματήσουν να αρνούνται τις γενικές

δηλώσεις, να έχουν εν μέρει κρίσεις (τέτοιες όπως «υπάρχει ένας πρώτος μεγαλύτερος από p») ή να υποθέτουν tetrium non datum.

Έτσι ο Hilbert αποφαίνεται ότι ίσως υπάρξει πρόβλημα με αυτού του τύπου τις σχέσεις αλλά ο κόσμος θα συνεχίσει να τις χρησιμοποιεί, οι μαθηματικοί δεν θα κινούνται εύκολα χωρίς αυτές και έτσι κάπως πρέπει να τις διατηρήσουμε. Εκ πρώτης όψεως αυτό ίσως φαίνεται παράλογο. Δεν έχουμε πάντα ό,τι θέλουμε στα μαθηματικά, το ακλόνητο οικοδόμημα, το τελευταίο φρούριο της αλήθειας. Δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι αληθινό μόνο και μόνο επειδή έτσι θέλουμε.

Συνειδητοποιούμε έτσι πως δεν υπάρχει διαφωνία. Στα σύγχρονα μαθηματικά είμαστε απόλυτα ελεύθεροι να κάνουμε ό,τι θέλουμε με μόνη προϋπόθεση πως ό,τι κάνουμε είναι συνεπές και έχει τουλάχιστον ένα πρότυπο. Αυτή η συνειδητοποίηση είχε διαμορφωθεί κατά το ήμισυ την εποχή που ο Hilbert έδωσε τη διάλεξή του. Βρισκόμαστε σε κατάσταση όμοια με αυτή του λογισμού του απειροστού πριν τον Weierstrauss. Θέλαμε απελπισμένα να διαιρέσουμε με το μηδέν και προσποιούμασταν ότι ο απειροστικός λογισμός δεν επινοήθηκε γι’ αυτό . Ο απειροστικός λογισμός δεν ήταν συνεπής με ό,τι ήδη είχε κατατεθεί και γι’ αυτό έπρεπε να εγκαταλειφθεί χάριν της ιδέας του «ορίου»,που συνιστά έναν πραγματικά συνεπή τρόπο να κάνουμε κατ’ ουσίαν το ίδιο πράγμα.

Ο Hilbert λύνει το πρόβλημα με το να κάνει κάτι παρόμοιο με αυτό: χρησιμοποιεί τα «ιδανικά στοιχεία». Δεν υπεισέρχεται σε καμία λεπτομέρεια για την κατασκευή των ιδανικών δηλώσεων, αλλά μας λέει ότι ουσιαστικά βρίσκονται γύρω μας, είναι ο τρόπος που εξ αρχής κάνουμε μαθηματικά γιατί είναι απλώς κοινές μεταβλητές όπως το x, το a και το b. Με την πεπερασμένη έννοια ένα γοτθικό γράμμα αντιπροσώπευε έναν μόνο αριθμό. Κατά τη δική μας καινούργια ιδανική έννοια τα ρωμαϊκά γράμματα σε μία σχέση μπορούν να αντικατασταθούν

από οποιουσδήποτε αριθμούς και να δίνουν μία λογική ιδιότητα με νόημα. Έχουμε τώρα δύο ειδών ιδιότητες τις πεπερασμένες που έχουν ένα πραγματικό νόημα και τις περισσότερο ασαφείς ιδανικές.

Υπάρχει όντως διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά είδη μεταβλητών; Φαίνεται σαν να λέμε το ίδιο πράγμα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι γότθικες μεταβλητές μας επιτρέπουν να βάζουμε έναν αριθμό τη φορά. Η ακριβής φύση αυτών των ρωμαϊκών μεταβλητών δεν έχει ξεκαθαριστεί. Ο Hilbert φαίνεται να τις περιγράφει σαν ένα είδος μπαλαντέρ. Το γεγονός ότι δηλώνει πως οι σχέσεις που περιλαμβάνουν τέτοιες μεταβλητές δεν «σημαίνουν δεν έχουν καμία αξία» δεν βοηθάει την κατάσταση.

Ο Hilbert δεν δηλώνει με ακρίβεια τι ακριβώς είναι αυτοί οι αριθμοί, αλλά φαίνεται να τους χρησιμοποιεί για να αντιπροσωπεύουν την άπειρη σύνδεση των 'γοτθικών' μεταβλητών. Έτσι δεν τους επιτρέπουμε να σημαίνουν τίποτα καθώς σύμφωνα με τη μαθηματική λογική απορρίπτουμε τις άπειρες συνδέσεις. Τους περιγράφει λοιπόν ως «ιδανικές σχέσεις», σχέσεις τις οποίες θα θέλαμε να δημιουργήσουμε αλλά δεν μπορούμε, όπως ακριβώς θα θέλαμε να υπήρχε η $\sqrt{-1}$.

Έπειτα ο Hilbert μας δίνει τα σύμβολα που έχει επιλέξει να χρησιμοποιεί για τον λογικό λογισμό, με την επιβεβαίωση ότι λειτουργούν ακριβώς όπως η πεπερασμένη λογική. Αυτό είναι ένα ευχάριστο αποτέλεσμα, αλλά δημιουργεί αμφιβολίες για τη σημασία συνέχισης ολόκληρης της άσκησης. Έχει αποδειχθεί ότι το να κάνουμε λογικό λογισμό βάσει των ιδανικών σχέσεων δεν διαφέρει καθόλου από το να κάνουμε λογικό λογισμό βάσει των πεπερασμένων σχέσεων, οι φόβοι μας για υπαρξιακό ποσοτικό προσδιορισμό επί άπειρων χώρων ήταν αβάσιμοι και μπορούμε να συνεχίσουμε όπως πριν. Είναι σαν να είμαστε δύσπιστοι για την πρόσθεση των λογικών ως προέκταση της

πρόσθεσης των ακεραίων. Βρίσκουμε ότι και οι δύο είναι απόλυτα συμβιβάσιμοι και έτσι παύουμε να τους διαχωρίζουμε.

Έπειτα περιγράφεται ο ρόλος του λογισμού μας για τις ιδανικές σχέσεις στο Φορμαλιστικό Πρόγραμμα του Hilbert. O Hilbert προτείνει να αρνηθούμε τη φόρμουλά μας για οποιαδήποτε 'επίσημη' σημασία και να αντικαταστήσουμε αυτό που αποκαλεί «ουσιώδη επαγωγή» με επίσημους κανόνες για τη σημασιολογία. Τολμάει ακόμα να περιγράψει την «ουσιώδη επαγωγή» ως αφελή. Αυτός ήταν πραγματικά ένας ευφυής τρόπος σκέψης, ο Godel όμως έδειξε ότι μια τέτοια προσέγγιση δεν θα μπορούσε ποτέ να μας δώσει όλες τις αλήθειες για ένα σύστημα.

Ο Hilbert συνεχίζει δίνοντας σε γενικές γραμμές τη φόρμα της απόδειξης στο νέο μας λογικό περιβάλλον. Δίνονται αξιώματα εκ των οποίων τα πιο σημαντικά είναι τα «παρα-πεπερασμένα αξιώματα». Αυτά περιγράφουν τη συμπεριφορά των υπαρξιακών και γενικών ποσοτικών προσδιοριστών σε όλους τους χώρους και ιδιαίτερα στους άπειρους χώρους. Η απόφαση Hilbert πως οι νόμοι αυτοί (οι νόμοι του De Morgan) δεν ήταν ξεκάθαροι για την περίπτωση του απείρου ήταν η αιτία αυτής της διάλεξης. Στην περίπτωση του πεπερασμένου, τέτοια αξιώματα δεν είναι απαραίτητα καθώς οι νόμοι του De Morgan είναι δυνατό να προέρχονται από τους ορισμούς λογικών προϊόντων και τα άλλα αξιώματα. Αυτό σηματοδοτεί ένα κρίσιμο βήμα. Ο Hilbert δεν ικανοποιείται από την εφαρμογή των νόμων του De Morgan για το άπειρο και απλώς επιλέγει να διατυπώσει με λογικά αξιώματα ποιό θα έπρεπε να είναι το ξεκάθαρο αποτέλεσμα. Ισχυρίζεται πως αυτά τα αξιώματα μπορούμε να τα αντλήσουμε από το περιβόητο Αξίωμα Της Επιλογής.

Τα μοντέρνα μαθηματικά επιλέγουν να αποδεχθεί το αξίωμα της επιλογής, και ο φευγαλέος μας εφιάλτης ότι πρόκειται για πεπερασμένη λογική σίγουρα ενθαρρύνει (χωρίς όμως να δικαιολογεί) μια τέτοια

άποψη. Είναι δυνατό το αξίωμα αυτό μια μέρα να οδηγήσει σε ποικίλους παραλογισμούς σαν αυτούς που εντοπίστηκαν στη λογική της απειροστής ανάλυσης; Δεν μπορούμε να αποκλείσουμε εντελώς μια τέτοια περίπτωση, αλλά φαίνεται απίθανη και αν δεν εμφανιστούν τέτοια προβλήματα καλά θα κάνουμε να εμπιστευόμαστε τη λειτουργία της άπειρης λογικής.

Τα υπόλοιπα αξιώματα είναι απλώς οι συνήθεις νόμοι της λογικής στους οποίους δεν χρειάζεται να εξετάσουμε την εσωτερική δομή των λογικών προτάσεων. Δεδομένου ότι δεχόμαστε tertium nor datur, θα ήταν πολύ δύσκολο να βρούμε κάποιο λάθος σε όλα αυτά.

Ο Hilbert έπειτα μας οδηγεί στην απόδειξη της συνέπειας δηλώνοντας ότι μια απαραίτητη προϋπόθεση για την εισαγωγή στις ιδανικές σχέσεις είναι το ότι «….η προέκταση δεν προκαλεί την εμφάνιση αντιθέσεων στον παλιό μικρότερο χώρο…» Δεν αναφέρει ότι είναι επίσης απαραίτητο ο μεγαλύτερος χώρος να μην πάσχει από έλλειψη συνοχής(όσον αφορά τη σύστασή του). Ένα οποιοδήποτε μη συνεπές σύστημα δεν αφορά τα μαθηματικά. Θα μπορούσε να σκεφτεί κάποιος ότι αυτό ήταν μια παράλειψη, μια παραδρομή και όχι ένα λάθος. Μια πιο σοβαρή όμως παράλειψη του Hilbert είναι ότι δεν αναφέρει εάν κάποιο μοντέλο θα ικανοποιήσει τα καινούργια μας αξιώματα. Φαίνεται αυτονόητο ότι οποιοδήποτε σύστημα που εμπεριέχει πεπερασμένα πολλά στοιχεία θα ανταποκρίνεται στα αξιώματα όμως ένα τόσο σημαντικό ζήτημα θα έπρεπε να αναφερθεί.

Ισχυρίζεται ότι για να αποδείξουμε τη συνέπεια του αξιώματος «πρέπει απλώς να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει το $1 \neq 1$». Στην πραγματικότητα αυτό είναι η αντιστροφή της πρότασης «η ισχύς του $1 \neq 1$ υποδεικνύει ότι

το σύστημα είναι ασυνεπές». Ο Hilbert προτείνει να το κάνει αυτό επίσημα και έτσι δημιουργείται πρόβλημα, η αβρότητα του Godel. Η ασυνέπεια του θεωρήματος του δηλώνει ότι δεν μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις αλήθειες σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης με επίσημα(;) μέσα. Έτσι δεν μπορούμε να παράγουμε μία επίσημη απόδειξη του ότι δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι 1!=1 σε αυτό το σύστημα. Ίσως μπορέσουμε να το κάνουμε, αλλά δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστος τρόπος ελέγχου της συνέπειας.

Περιχαρής, ωστόσο, ο Hilbert μας πληροφορεί ότι μια τέτοια απόδειξη είναι πιθανή και επομένως τα αξιώματα πρέπει να είναι συνεπή. Επίσης ισχυρίζεται πως αυτό δείχνει ότι τα αριθμητικά αξιώματα είναι συνεπή το οποίο είναι όντως πολύ καθησυχαστικό. Τελειώνει τη διάλεξη με τον ισχυρισμό ότι η νέα θεωρία του μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε την Υπόθεση της Συνέχειας του Cantor. Μία υποσημείωση ωστόσο, δείχνει ότι απλώς σκιαγράφησε τη λύση χωρίς ποτέ να φτάσει στην απόδειξη. Είναι απίθανο η λύση του να είναι έγκυρη από τη στιγμή που αποδείχθηκε η Υπόθεση της Συνέχειας το 19….

Ό,τι είδαμε είναι μέρος της ανάπτυξης του Φορμαλιστικού Προγράμματος του Hilbert το οποίο είχε δεχθεί κριτικές και πριν ο Godel αποδείξει ότι είναι ουσιαστικά περιορισμένο. Πρώτος ανάμεσα στους επικριτές του ήταν ο ιδρυτής του Ιντουϊσιονισμού Brouwer. Αυτός πίστευε πως βλέποντας το πεπερασμένο περιοριζόμαστε στην συγκεκριμένη αντίληψη των πραγμάτων και δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την αφηρημένη αντίληψη τους. Επιπλέον μας εμποδίζει να ασχοληθούμε με την δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών. Αυτές οι ενστάσεις συμπίπτουν με τη σύγχρονη άποψη των μαθηματικών. Ωστόσο η αρχική ένσταση του Brouwer ήταν πως η συνέπεια δεν είναι επαρκές επιχείρημα για την υιοθέτηση ενός συνόλου αξιωμάτων. Πρέπει

να αντιλαμβανόμαστε καθαρά και διαισθητικά τα σύμβολα που ενέχονται κάθε φορά και να χρησιμοποιούμε τη διαίσθησή μας για να αιτιολογήσουμε.

Σύμφωνα με τη σύγχρονη άποψη των μαθηματικών όντως η συνέπεια δε θεωρείται μία επαρκής αιτιολόγηση για την υιοθέτηση ενός συνόλου αξιωμάτων. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας αυτού που ονομάζουμε ιδιότητα της κατηγορίας. Όχι μόνο πρέπει να έχουμε ένα συνεπές σύνολο αξιωμάτων αλλά πρέπει επίσης να υπάρχει τουλάχιστον ένα μοντέλο για αυτά, διαφορετικά είναι άσχετα με την όλη λογική των μαθηματικών. Και έτσι παραμένει στις βάσεις των μαθηματικών το πρόβλημα του αποκλεισμού συνεπών αξιωματικών συστημάτων που δεν έχουν κανένα μοντέλο.

Η ιδιότητα της κατηγορίας είναι επίσης σχετική με το φορμαλιστικό σύστημα στο σύνολό του. Εάν απορρίψουμε ένα σύμβολο «επίσημης» σημασίας ,έχουμε τη δυνατότητα να το ερμηνεύσουμε με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Ένα καλό παράδειγμα είναι η θεωρία των ομάδων για την οποία υπάρχει μια πλούσια και διαφορετική συλλογή κατάλληλων μοντέλων /ομάδων .

Για να συνοψίσουμε, φαίνεται λογικό να αποδεχθούμε τη μη-ύπαρξη ενός φυσικού απείρου ως αξίωμα. Τα προβλήματα που προκύπτουν ανάμεσα στη φύση και τα μαθηματικά προκύπτουν επειδή η διαισθητική μας αντίληψη για τη φύση από την οποία εξελίχθηκαν τα μαθηματικά έχει τεράστια διαφορά απ’ την πραγματικότητα. Εξετάζοντας τα πιθανά προβληματικά θέματα του υπαρξιακού ποσοτικού προσδιορισμού στις άπειρες περιοχές, βρίσκουμε πως, αν δεχθούμε το αξίωμα της επιλογής, έχουμε τη δυνατότητα να διαφυλάξουμε τα «προφανή» αποτελέσματα και να διατηρήσουμε τη συνέπεια χωρίς τροποποιήσεις στο λογικό λογισμό, πετυχαίνοντας έτσι μια διαυγή λύση

του προβλήματος. Άσχετα με το αν ο ποσοτικός προσδιορισμός είναι πρόβλημα ή όχι εμείς έχουμε τη λύση-για παν ενδεχόμενο.

6. Το πρόγραμμα του D. Hilbert

Ο Hilbert , είχε μια ολοκληρωμένη άποψη για την θεμελίωση των μαθηματικών. Αρχικά επικέντρωσε την προσοχή του στην θεμελίωση της Γεωμετρίας . Στην συνέχεια αντιμετώπισε το πρόβλημα θεμελίωσης των φυσικών και πραγματικών αριθμών. Θεώρησε μάλιστα, ότι με τις δυνατότητες που διενοίγοντο με τις θεμελιώσεις των τομών Dedekind και κατασκευής του Cantor , το πρόβλημα της ύπαρξης των πραγματικών αριθμών, είναι ισοδύναμο με την μη αντιφατικότητα του αξιωματικού συστήματος που θεμελιώνει τους πραγματικούς αριθμούς.
Αλλά , με δεδομένη και την κριτική του Brouwer, ο Hilbert , θεώρησε , ότι απαιτείται μια συνολική και τελική αντιμετώπιση της θεμελίωσης των μαθηματικών.

Το κείμενο της ομιλίας του Hilbert «Για το άπειρο» πρέπει ίσως να θεωρηθεί ως το σημαντικότερο της δεκαετίας του 1920[19] . Ο Hilbert , διατυπώνει το περατοκρατικό (finitism) πρόγραμμα, θεμελίωσης των μαθηματικών , το οποίο αποκλείνει από τον παλαιότερο φορμαλισμό, σε σχέση με την αλήθεια και την σημασιολογία των μαθηματικών.
Το πρόγραμμα αυτό προέτεινε λύσεις στα προβλήματα θεμελίωσης των μαθηματικών, ενσωματώνοντας σε αυτό κάποιες ιντουϊσιονιστικές

[19] «Μαθηματικός Ρεαλισμός» Γεώργιος Ρουσόπουλος –Εκδόσεις Γράμματα, ΑΘΗΝΑ 1999 σελ. 75

απόψεις, τις οποίες ο Hilbert , θεωρεί γόνιμες για τα κλασικά μαθηματικά. Η υποδοχή αυτών των λύσεων, υπήρξε γενικά ενθουσιώδης, ακόμα κι από συμπαθούντες του ιντουϊσιονιστικού προγράμματος, όπως ο Weyl .

Ο Hilbert , για την επιτυχία του προγράμματός του καταβάλει το τίμημα , αφού εγκαταλείπει χαρακτηριστικές θέσεις του φορμαλισμού. Παρ' ότι φάνηκε να αποτυγχάνει το πρόγραμμα του Hilbert λόγω της εύρεσης του θεωρήματος της μη πληρότητας του Goedel (1931) , παρ' όλα ταύτα, το πλούσιο σε φιλοσοφικό υπόβαθρο , αυτό πρόγραμμα δεν έχει έως σήμερα εγκαταλειφθεί. Έπρεπε να υπερβληθούν οι περιορισμοί στο πλαίσιο της Λογικίστικης αντίληψης του Frege και των παραδόξων του Ryssell , αλλά και οι κριτικές των Poincare και Brouwer .

Δεσπόζουσα θέση στο πρόγραμμα του Hilbert , έχει η μελέτη της έννοιας του απείρου, το οποίο πρέπει κατά κάποιο τρόπο να «δαμαστεί» ., λόγω του ότι εμπλέκεται στους στοιχειώδης τύπους της Αριθμητικής, την Συνολοθεωρία και την πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική. Το άπειρο θα πρέπει να εξοβελιστεί από τα μαθηματικά και από την φύση, αφού, όπως λέει κι ο ίδιος ο Hilbert, «Το σύμπαν είναι πεπερασμένο κατά δύο έννοιες ,και κατά όσον αφορά το απείρως μικρό και κατά όσον αφορά το απείρως μεγάλο.»[20]

Η ιδέα του Hilbert είναι τότε να μελετήσουμε τον τρόπο εμφάνισης του απείρου στα μαθηματικά και στη συνέχεια να επιχειρήσουμε να αναγάγουμε την περιοχή όπου αυτό εμφανίζεται σε μια πιο στενή (Περιορισμένη περιοχή), στην οποία δεν Θα εμφανίζεται πλέον. Αν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε μια περιορισμένη περιοχή όπου το άπειρο δεν έχει θέση, τότε τα μαθηματικά μπορεί να προκύψουν ως μετριοπαθής επέκταση της περιορισμένης περιοχής. Έτσι διατυπωμένο το πρόγραμμα Hilbert απαιτεί τον καθορισμό της περιορισμένης περιοχής

και της μεθόδου αναγωγής της ευρύτερης περιοχής στην περιορισμένη περιοχή. (Resnik 1980, 86)

Η περιορισμένη περιοχή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι τα αντικείμενά της είναι "γνήσια" μαθηματικά αντικείμενα. Πρόκειται για εξω-λογικά αριθμητικά σύμβολα τα οποία καθ' εαυτά δεν έχουν κανένα νόημα. Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι ατομικά δημιουργήματα της φαντασίας μας, αλλά ούτε λογικές κατασκευές: είναι συμβολικά αλλά συγκεκριμένα αντικείμενα. Πρόκειται για πεπερασμένες ακολουθίες ομοειδών στοιχείων, όπως, λ.χ., 111...11.

Για αυτά τα αντικείμενα υποτίθεται ότι μας δίδεται ένα «συντακτικό» με βάση το οποίο σχηματίζουμε προτάσεις με πλήρες νόημα. Δεν έχει σημασία αν μιλούμε για διαδοχή μονάδων («1») ή αστερίσκων («*») στο βαθμό που πρόκειται για πεπερασμένη διαδοχή (ομοειδών) συμβόλων τα οποία συντάσσονται και μετασχηματίζονται κατόπιν με βάση καθορισμένους κανόνες. Ακόμη, αυτό που ενδιαφέρει τον Hilbert δεν είναι η οντολογική τους συγκρότηση αλλά η γνωσιοθεωρητική μας πρόσβαση σ' αυτά: τα μαθηματικά αντικείμενα αναγνωρίζονται αμέσως από τα υποκείμενα.

Οι συμβολικές αυτές οντότητες αρχικά δηλώνονται ως

1,11,111, 1111,...,

και στη συνέχεια συντομογραφούνται ως

1,2,3,4,...

Η πρόταση

$3<5$

μας πληροφορεί ότι η ακολουθία που παριστάνεται με το σύμβολο «3» είναι κοντύτερη από την ακολουθία που παριστάνεται με το σύμβολο

[20] Γ.Ρουσόπουλος 1999 , 76

«5». Η περιορισμένη περιοχή έτσι εμπλουτίζεται με βάση τις βασικές αυτές οντότητες και τα διαισθητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τους συνδυασμούς αυτών των οντοτήτων.

Ακόμη, ο Hilbert θεωρεί ότι η άκριτη χρησιμοποίηση διαισθητικών μεθόδων θα μας οδηγήσει στα γνωστά παράδοξα. Επιπλέον, η περιορισμένη πρακτική που έτσι εγκαθιδρύεται χαρακτηρίζεται από δυσκαμψία και πολυπλοκότητα στους λογικούς νόμους. Η λύση που προτείνεται είναι να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα με τη βοήθεια ιδεατών στοιχείων (ideal elements) που πρέπει να προστεθούν στην περιορισμένη περιοχή, κατ' αντιστοιχία με την εισαγωγή, λ.χ., του φανταστικού αριθμού i στο σώμα των πραγματικών αριθμών για την επίλυση της εξίσωσης
$\chi^2+1=0$

Η ζητούμενη επέκταση της περιορισμένης περιοχής δεν πρέπει βέβαια να προκαλεί αντιφάσεις στην περιορισμένη περιοχή. Έτσι, λ.χ., ο τύπος, που αναφέρεται ως αντιμεταθετικός νόμος των φυσικών αριθμών και. εκφράζεται υπό την μορφή:

(1) a+b=b+a, θα έπρεπε κανονικά να εκφραστεί ως:

(2) (a)(b)(a+b=b+a),[21]

οπότε η εμφάνιση των καθολικών ποσοδεικτών θα τον καθιστούσε «ύποπτο» (είναι μη πραγματικός, ιδεατός τύπος) στο πλαίσιο της περιορισμένης περιοχής.

Αν όμως γράψουμε τον τύπο (1) ως «πραγματικό» τύπο, τότε γράφουμε:

ι3) (α+β=β+α),

με τον οποίο εννοούμε μια συντομογραφία της πρότασης:

ο τύπος <α+β=β+α>

(4) μας δίνει μια αληθή πρόταση όταν αντικαταστήσουμε τα α, β με συγκεκριμένους αριθμούς, όπως , λ.χ., «2 + 3 =3 + 2».

Η τεχνική αυτή αποσκοπεί στο να συμπληρώσουμε την περιορισμένη περιοχή με ιδεατό στοιχεία, η οποία ειδάλλως θα παρέμενε φτωχή και άγονη ως μαθηματική περιοχή. Η τυποποίηση των μαθηματικών αποδείξεων, η δυνατότητα εγγραφής και αναπαράστασής τους στην περιορισμένη περιοχή είναι αναγκαία. Έτσι, η έννοια και λειτουργία της απόδειξης γίνεται το πιο κρίσιμο σημείο του όλου προγράμματος. Μια απόδειξη μέσω της τυποποίησης γίνεται ένα ευκρινές, συγκεκριμένο αντικείμενο, όπως ένα αριθμητικό σύμβολο άμεσα δοσμένο στην εποπτεία μας.

Το πρόγραμμα του Hilbert τώρα παίρνει της εξής μορφή:

Να αποδειχτεί στην περιορισμένη περιοχή ότι κάθε απόδειξη μιας πρότασης που χρησιμοποιεί την ιδεατή περιοχή μπορεί να αντικατασταθεί από μια απόδειξη που χρησιμοποιεί στοιχεία αποκλειστικά της περιορισμένης περιοχής.

Έτσι, η απόδειξη, λ.χ., της πρότασης «2^5X2^4=2^9» θα μπορούσε να γίνει εύκολα με τη βοήθεια της ιδεατής πρότασης «$ν^α$Χ$ν^β$=$ν^{α+β}$» (με ή χωρίς

[21] προφανώς , ∀α ≡(α)

ποσοδείκτες). Εν τούτοις, μπορούμε να καταφύγουμε στον υπολογισμό του αποτελέσματος 2^5X2^4 και 2^9 χωριστά, και να βεβαιώσουμε ότι πρόκειται για τα ίδια εξαγόμενα (περατοκρατική απόδειξη). Το ζήτημα ασφαλώς δεν είναι να καταφεύγουμε στους υπολογισμούς που κάθε φορά χρειαζόμαστε, αποδεικνύοντας έτσι συγκεκριμένες προτάσεις, αλλά να μελετήσουμε γενικότερες μεθόδους απόδειξης. Αυτές οι μέθοδοι δεν είναι παρά κατασκευαστικές μέθοδοι που προκύπτουν από τον περατοκρατικό, συνδυαστικό χαρακτήρα των συμβόλων της περιορισμένης περιοχής, παρέχοντας έτσι πραγματικές αποδείξεις. Η άποψη αυτή διατυπώνεται με ιδιαίτερη σαφήνεια από τον von Neumann, σύμφωνα με τον οποίο οι κατασκευαστικές μέθοδοι εμφανίζονται ακόμα και σε εκείνα τα μέρη των μαθηματικών όπου το περιεχόμενό τους δεν είναι κατασκευαστικό. Οι κατασκευαστικές μέθοδοι είναι όμως εμφανείς στα επιμέρους βήματα που ακολουθεί η (κλασική) απόδειξη. Ο von Neumann έτσι σκοπεύει να οριοθετήσει μια ικανοποιητική απόσταση ασφαλείας μεταξύ κλασικών μαθηματικών και ιντουισιονισμού· πιο συγκεκριμένα. σκοπεύει να δείξει ότι ο περατοκρατισμός ως φιλοσοφική άποψη των κλασικών μαθηματικών μπορεί να προσφέρει μια εναλλακτική λύση στις κατασκευαστικές απαιτήσεις των ιντουισιονιστών.

Η άποψη του von Neumann γίνεται σαφέστερη με τη βοήθεια του παραδείγματος που αναφέρεται στην ύπαρξη ενός πραγματικού αριθμού α με την ιδιότητα Ε(α). Στα κλασικά μαθηματικά είναι δυνατόν να μη μπορούμε να δώσουμε κατασκευαστικά την ύπαρξη του αριθμού α, όμως, ο τυπικός τρόπος με τον οποίο φτάνουμε στην πρόταση ίσως μπορεί να δοθεί με περατοκρατικό τρόπο. Μια τέτοια αντίληψη αντιδιαστέλλει την περατοκρατική άποψη της απόδειξης / κατασκευής, από αυτή των ιντουισιονιστών. Συγκεκριμένα, ο von Neumann συζητά το παράδειγμα μιας συνάρτησης **F(x)** για την οποία μπορούμε να ισχυρι-

στούμε ότι υπάρχει σημείο α του διαστήματος ορισμού της, όπου η συνάρτηση μηδενίζεται. Ας καλέσουμε Ε(α) αυτή την ιδιότητα της συναρτήσεως F(x) και του σημείου α. Η συνάρτηση F(x) εμπλέκει στον ορισμό της την ***εικασία τον Goldbach*** και συνεπώς, η κατασκευή του αριθμού α, αν ζητείτο, δεν είναι εφικτή καθώς δεν γνωρίζουμε προκαταβολικά την τιμή αλήθειας της εικασίας του Goldbach[22] Αυτό το επιχείρημα «αποδεικνύει» κατά τον von Neumann ότι, ενώ ο αριθμός α δεν έχει οριστεί κατασκευαστικά —και μάλιστα κάτι τέτοιο ίσως είναι αδύνατον εντούτοις, η αποδεικτική διαδικασία που προσφέρεται είναι καθαρά κατασκευαστική, στο μέτρο που μας επιτρέπει να δώσουμε τα βήματα της απόδειξης (περατοκρατική μέθοδος). Χωρίς συνεπώς, να θυσιάζει τα αποτελέσματα των κλασικών μαθηματικών, και χωρίς να αποδέχεται μια παθητική στάση απέναντι στις αποδείξεις ύπαρξης, το περατοκρατικό πρόγραμμα αποσκοπεί να «σώσει» τα κλασικά μαθηματικά, αποκαθιστώντας τη συνέπειά τους μέσω περατοκρατικών μεθόδων απόδειξης. Πρόκειται δηλαδή για μια ερμηνεία των κλασικών μαθηματικών σε πλαίσια όπου καθορίζεται μια μεθοδολογία ελέγχου παρόμοια με αυτήν που χρησιμοποιούμε στη στοιχειώδη αριθμητική των φυσικών αριθμών. Η σημασία της απόδειξης για το περατοκρατικό πρόγραμμα έγκειται στην κατασκευαστική μεθοδολογία η οποία μετατρέπει τις ήδη αποδειχθείσες προτάσεις (ή τις κατ' αρχήν αποδείξιμες) των κλασικών μαθηματικών σε τύπους και σχήματα (Schemata) της περιορισμένης περιοχής (πρωταρχική αναδρομική αριθμητική (Primitive Recursive Arithmetic), στη σύγχρονη ορολογία).

Εκτός όμως από το ασθενές αίτημα αναγωγής των μαθηματικών στην περιορισμένη περιοχή με τη βοήθεια ελεγκτικών μεθόδων, ο Hilbert διατύπωσε και ένα ισχυρό αίτημα που αφορούσε την απόδειξη της μη αντιφατικότητας του γενικότερου συστήματος που προκύπτει με τον

[22] «Κάθε άρτιος , γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων»

τρόπο αυτό. Η έμφαση που δόθηκε στο να αποδειχτεί η μη αντιφατικότητα της πραγματικής περιοχής είναι χαρακτηριστική. Θα νόμιζε κανείς ότι, ανεξάρτητα από την επιτυχία και τη σχετική συνέπεια με την οποία πραγματοποιείται το πρώτο μέρος του εγχειρήματος (δηλαδή, το ασθενές αίτημα), το πρόγραμμα ζητούσε να αποκαταστήσει τη μη αντιφατικότητα της πραγματικής περιοχής (ισχυρό αίτημα), ανεξάρτητα από δυσκολίες και εννοιολογικές ασάφειες.

Σήμερα γενικά πιστεύεται ότι, χάρη στα αποτελέσματα των ερευνών του Goedel, είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί το ουσιαστικό αυτό μέρος του αρχικού προγράμματος Hilbert. Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας της αριθμητικής, δεν μπορεί να υπάρξει πλήρης τυποποίηση του ιδεατού τμήματος της αριθμητικής, ενώ σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα, μια απόδειξη μη αντιφατικότητας ενός τυπικού συστήματος που περιέχει την αριθμητική απαιτεί τη χρήση μεθόδων που ξεπερνούν το πλαίσιο στο οποίο εργαζόμαστε: για να αποκατασταθεί η μη αντιφατικότητα του τυπικού συστήματος απαιτούνται εννοιολογικά εργαλεία που δεν είναι διαθέσιμα στο πλαίσιο που εργαζόμαστε.

7. Οντολογία και νόημα στο πρόγραμμα Hilbert[23]

Το πρόγραμμα Hilbert, όπως ήδη αναφέρθηκε, εμπεριέχει δύο συνιστώσες. Η πρώτη αφορά το ασθενές αίτημα της δυνατότητας αναγωγής των μαθηματικών στην περιορισμένη περιοχή υπό όρους σχετικούς με το όλο πρόγραμμα. Η δεύτερη συνιστώσα αφορά το ισχυρό αίτημα απόδειξης της μη αντιφατικότητας των μαθηματικών. Η κριτική εξέταση που ακολουθεί αφορά μόνο το ασθενές αίτημα του

[23] Γ.Ρουσόπουλος 1999 (σελ.82-91)

περατοκρατισμού για τη δυνατότητα και τη σημασία της προτεινόμενης ανταγωγής.

8. Φυσική και μαθηματική πραγματικότητα.

Η κατανόηση του ρόλου του απείρου στα μαθηματικά και η σημασία του στο περατοκρατικό πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής εμπειρίας απαιτεί την ομοιομορφία μεταξύ φυσικής και μαθηματικής επιστήμης.[5~] Η χρησιμοποίησή του όμως προϋποθέτει μια ορισμένη οντολογική άποψη, που Θα φαινόταν ότι βρίσκεται σε στοιχειώδη συμφωνία με τον οντολογικό ρεαλισμό των φυσικών και υλικών αντικειμένων. Έτσι το πρόγραμμα HiIbert συνίσταται όχι στην εξάλειψη του απείρου, αλλά μάλλον στη δυνατότητα συνεργασίας μαζί του υπό πρόσφορες συνθήκες. Τις προϋποθέσεις αυτές, ισχυρίζεται ο HiIbert, τις πληροί η περατοκρατική μέθοδος *(finitism).* Αυτό σημαίνει, μεταξύ άλλων, αναγνώριση και περιορισμό του ρόλου της λογικής στη θεμελίωση των μαθηματικών, και το σημαντικότερο, σημαίνει ότι τα μαθηματικά έχουν ως αντικείμενο κάποια “εξω-λογικά, συγκεκριμένα αντικείμενα” (όπ.π., 281). Τα οντολογικά γνωρίσματα των μαθηματικών αντικειμένων δεν είναι ιδιαίτερα σαφή και ευανάγνωστα, στο μέτρο που δίδονται και αναγνωρίζονται ως τέτοια διαμέσου της αμεσότητας που χαρακτηρίζει τα σύμβολα της στοιχειώδους αριθμητικής. Έτσι, από τη μια πλευρά τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι λογικές κατασκευές ή κατασκευές του νου, ενώ από την άλλη δεν είναι εύκολο να τα θεωρήσουμε ως ισοδύναμα προς τα φυσικά και υλικά αντικείμενα. Η δυσαναλογία ανάμεσα στα μαθηματικά αντικείμενα και στα φυσικά και υλικά αντικείμενα εντείνεται από το γεγονός ότι τα αντικείμενα της αριθμητικής είναι δυνάμει άπειρα στο πλήθος —σε αντίθεση με τα

φυσικά αντικείμενα, τα οποία είναι πιθανώς πεπερασμένα στο πλήθος. Η υπόθεση μιας αριθμητικής με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων φαίνεται αντιφατική από θεωρητική άποψη: αν φανταστούμε ότι υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός Ν που είναι το φυσικό όριο των αριθμών, τι αποκλείει να δεχτούμε την ύπαρξη του αμέσως επόμενου αριθμού Ν+ 1; Αν πάλι υποθέσουμε ότι στην πράξη δεν είναι δυνατόν να έχουμε διαθέσιμα περισσότερα από Ν αντικείμενα, τότε χρειάζεται να καταφύγουμε σε μια αριθμητική modulo N, όσον αφορά τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να είναι στις προθέσεις του Hilbert και θα δημιουργούσε, άλλωστε, κάποια ένταση στις σχέσεις μεταξύ πραγματικής και ιδεατής περιοχής της αριθμητικής.

Ανεξάρτητα από τα προηγούμενα, είναι πάντως δύσκολο να ισχυριστεί Κανείς ότι μια πεπερασμένη διαδοχή συμβόλων όπως, λ.χ.,

(1) 111111111111111111111111111111111

αναγνωρίζεται αμέσως, ή ότι χαρακτηρίζεται από μια δομική ευκρίνεια, παρόλον που η (1) δίδεται ως ένα όλον στην εποπτεία μας. Και το πιο σημαντικό, για να διαπιστώσει κανείς ότι η (1) υποδηλώνει το 30 ή το 33 πρέπει προηγουμένως να καταφύγει στην αρίθμηση, οπότε πάλι προϋποθέτουμε κάποια γνώση του αριθμού που θα προκύψει. Ανάλογη δυσκολία στα περατοκρατικά μαθηματικά είναι ο έλεγχος της πρότασης

(2) 1111111111<11111111111.

Είναι, λ.χ., η (2) αληθής ή ψευδής; Δεν θα μπορούσε κανείς να αναφερθεί στο μήκος αυτών των ακολουθιών, εκτός αν πάλι καταφύγει

στην αρίθμηση, οπότε γνωρίζουμε προκαταβολικά αυτό που ζητείται να ελέγξουμε, ότι, π.χ., κατά την αρίθμηση το 10 προηγείται από το 11. Και αν κανείς καταφύγει στην αντιστοιχία ένα προς ένα, πάλι δεν μπορεί να γίνεται λόγος για άμεσα, διαισθητικά μαθηματικά χωρίς προϋποθέσεις, όπως απαιτούσε ο Hilbert. Για να αποφύγουμε μάλιστα άλλα είδη παρερμηνειών στις οποίες είναι εύκολο να υποπέσουμε όσο στηριζόμαστε στην άμεση αναγνώριση και διαισθητική προφάνεια των συμβόλων, πρέπει να υποθέσουμε ότι τα σύμβολα διατηρούν μια ταυτότητα Πέρα από το χρόνο και το χώρο, καθώς και ότι είναι ανεξάρτητα από δευτερεύοντα χαρακτηριστικά. Έτσι τα σύμβολα δεν επηρεάζονται από τη χωρική και χρονική θέση τους, ούτε το 11 διακρί-νεται από το ***11*** (διαφορετικό μέγεθος, χρώμα κλπ.). Φαίνεται δηλαδή ότι είναι ανάγκη, να διατυπώσουμε σαφώς το συντακτικό του σχηματισμού των συμβόλων: θεωρώντας τα ως δεδομένα μπορεί κανείς στη συνέχεια να μιλάει για συνδυασμούς και συμπλοκές ανάμεσά τους.

9. Το άπειρο στο περατοκρατικό πρόγραμμα: μια μορφή αναλογίας.

Αναμφίβολα η έννοια και ο ρόλος του απείρου στα μαθηματικά είναι ζήτημα Κεντρικής σημασίας για τον Hilbert. Η αναφορά στον εξοβελισμό του απείρου από τη φύση γίνεται στο όνομα μιας ενιαίας μεθοδολογίας: το άπειρο δεν πρέπει να απαντά ούτε στη φύση ούτε στα μαθηματικά. Αυτή η προσέγγιση του Hilbert δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο Hilbert θεωρεί το άπειρο ως πηγή προβλημάτων στη θεμελίωση των μαθηματικών. Ακόμα, αν υποθέσουμε ότι ο Hilbert πετυχαίνει να εξαλείψει το άπειρο από τα μαθηματικά ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στην περίπτωση της φυσικής επιστήμης, το πρόγραμμά του

δεν θα στερούνταν σημασίας και ενδιαφέροντος. Στο πλαίσιο όμως μιας ενιαίας συμπεριφοράς στη φύση και τη σκέψη, θα ήταν παράδοξο το ενδεχόμενο η έννοια του απείρου να απαντά στη φύση παρά τον εξοβελισμό της από τη μαθηματική περιοχή. Για τον Hilbert τα παράδοξα των μαθηματικών ήταν αποτέλεσμα μιας ορισμένης χρήσης του απείρου (μέσω των λογικών νόμων, όπως λ.χ. στην περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη): Πρόκειται για αντίδραση στο λογικισμό του Frege και του Russell. Η προσέγγιση του Hilbert είναι Καντιανού χαρακτήρα: η άμεση και εποπτική πρόσληψη των μαθηματικών δεδομένων ξεκινάει από τα σύμβολα, τις στοιχειώδεις σχέσεις και τα λογικά σχήματα.

Η αναλογία που επικαλείται ο Hilbert, αρχικά για το χειρισμό του απείρου, επεκτείνεται στη συνέχεια στην προσέγγιση των υλικών αντικειμένων και των εξω-λογικών συμβόλων της αριθμητικής μέσω της άμεσης αντιληπτικής ικανότητας αυτών των αντικειμένων. Αυτή η πρωταρχική προ-λογική εποπτική αμεσότητα των στοιχειωδών συμβόλων και των τύπων της αριθμητικής που επικαλείται ο Hilbert, μας φέρνει πιο κοντά ακόμα στην αναφερθείσα αναλογία με την Καντιανή εποπτεία ως προς τα φυσικά αντικείμενα. Όμως, πρέπει να παραδεχτούμε ότι παρά τις όποιες υπάρχουσες αναλογίες μεταξύ του προγράμματος Hilbert και της Καντιανής φιλοσοφίας, και ακόμα παρά τους παραλληλισμούς που θα μπορούσε κανείς να αναφέρει για να προσδώσει φιλοσοφικό βάρος στο πρόγραμμα Hilbert, η τελική εγκυρότητα του πρώτου δεν μπορεί να θεμελιωθεί μόνο σ' αυτές.

Αξίζει τον κόπο να σημειώσουμε την αποτίμηση του Weyl για το πρόγραμμα Hilbert:

> «[Ο Hilbert] κατόρθωσε να διασώσει τα κλασικά μαθηματικά με το να ερμηνεύσει ξανά το νόημά τους χωρίς να μειώσει τον πλούτο τους. Οπωσδήποτε πρέπει να αναγνωρίσω την τεράστια

σημασία και εμβέλεια της κίνησης αυτής του Hilbert, η οποία προφανώς οφείλεται στην πίεση των περιστάσεων.»

Εντυπωσιασμένος από “την κίνηση του Hilbert”, ο Weyl επισημαίνει μια γόνιμη ενσωμάτωση των κριτικών απόψεων του ιντουισιονισμού και υπαγωγή κατασκευαστικών στοιχείων στα κλασικά μαθηματικά, χωρίς τις αναγκαίες ουσίες που προτείνει ο Brouwer. Στο πνεύμα αυτής της ερμηνείας οπωσδήποτε, πρέπει να υπαχθεί και η παρακάτω παρατήρηση του Weyl, σύμφωνα με την οποία:

«Στο βάθος ο Hilbert δεν ενδιαφέρεται ας πούμε μόνο για το 0`, 0``, θ```,... αλλά για το τυχόν 0`````....`, για το τυχόν αριθμητικό που δίδεται με συγκεκριμένο τρόπο»

Πρόκειται για την κατανόηση μιας όψης της περατοκρατικής μεθόδου. Διότι μπορούμε να φανταστούμε την κλασική κατασκευή που υπαινίσσεται ο Weyl πρόκειται για μια πρόταση της μορφής:

(1) (χ)Α(χ),

όπου τα χ διατρέχουν το πεδίο των φυσικών αριθμών. Στην κλασική της ερμηνεία, η (1) ισοδυναμεί με μια άπειρη λογική σύζευξη των επιμέρους προτάσεων Α(0), Α(1), Α(2)……… Το ζητούμενο στο πλαίσιο του περατοκρατισμού είναι να εκμεταλλευτούμε την παρατήρηση του Weyl χωρίς να αναχθούμε στην κλασική ερμηνεία. Λαβή για μια διαφορετική αντιμετώπιση και ερμηνεία των προτάσεων με καθολικό προσοδείκτη, όπως η (1), μας δίδει και η ακόλουθη παρατήρηση του Herbrand:

«Όταν λέμε ότι ένα θεώρημα είναι αληθές για όλα τα χ, εννοούμε ότι για κάθε χ θεωρούμενο χωριστά είναι δυνατό να επαναλάβουμε το

γενικό θεώρημα (επιχείρημα) — το οποίο πρέπει να θεωρηθεί απλώς αρχέτυπο αυτών των επιμέρους επιχειρημάτων»

Η άποψη αυτή, σύμφωνα με την οποία η καθολική ποσοτικοποίηση διατρέχει το πεδίο των αποδείξεων, αποκλίνει από την ερμηνεία που συνήθως υιοθετείται στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών, και πλησιάζει στην απαίτηση του Brouwer για την ιντουισιονιστική ερμηνεία της (1) ως μιας συνάρτησης που συνδέει το φυσικό αριθμό χ με την κατασκευή Α(χ). Παρόλα αυτά, το πρόγραμμα του Hilbert δεν είναι διατεθειμένο να προχωρήσει προς / και να συμβιβαστεί με την άποψη του ιντουισιονισμού.

Αυτό γίνεται σαφές στο παράδειγμα του von Neumann, που παρουσιάσαμε προηγουμένως, σχετικά με την ύπαρξη ριζών μιας εξίσωσης. Στο πλαίσιο του περατοκρατισμού, κατά τον von Neumann, μια πρόταση με υπαρκτικό ποσοδείκτη δεν πρέπει να εκλειφθεί αποκλειστικά ως ένα αλγόριθμος που κατασκευάζει τη ρίζα της εξίσωσης — όπως θα απαιτούσε η ιντουισιονιστική ερμηνεία. Το ουσιαστικό στην περατοκρατική ερμηνεία, κατά τον von Neumann, είναι η κατασκευή των διαδοχικών σταδίων τα οποία οδηγούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Μια τέτοια διαδικασία θεωρείται και κατασκευαστική και περατοκρατική: ο κατασκευαστικός της χαρακτήρας γίνεται σαφέστερος με βάση τη δυνατότητα να ελέγξουμε αναγνώσιμα σχήματα συμβόλων / βημάτων της απόδειξης. Συνεπώς, στο πλαίσιο του περατοκρατισμού, το κατασκευαστικό μας ενδιαφέρον μετατοπίζεται προς μια μεθοδολογία των αποδείξεων και των ελέγχων, χωρίς έτσι να θίγεται η γενικότερη σημασιολογία στην οποία στηρίζονται τα κλασικά μαθηματικά. Με την έννοια αυτή η κατασκευαστικότητα αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα του συντακτικού επιπέδου των προτάσεων και δεν αφορά τη γνήσια

μαθηματική διαδικασία της απόδειξης, της αλήθειας και του νοήματος των προτάσεων. Με άλλα λόγια, η ένταση που εμφανίζεται αφορά την αποδειξιμότητα και την αλήθεια των προτάσεων.

10. Το νόημα: μια δεύτερη αναλογία.

Το περατοκρατικό πρόγραμμα δεν αποδέχεται απλώς μόνο τις ρεαλιστικές οντολογικές δεσμεύσεις των κλασικών μαθηματικών. Επιπλέον κινείται μέσα στο πλαίσιο της κλασικής σημασιολογίας με βάση την οποία προσπαθεί να «σώσει» τα μαθηματικά. Η προτεινόμενη διάσωση δεν είναι πλήρης αν δεν αναγνωρίζουμε τη σταθερότητα των λογικών κανόνων. Ως λογικούς κανόνες πρέπει να εκλάβουμε τους κανόνες της κλασικής λογικής. Ο Hilbert αναφέρεται σ’ αυτούς, όταν παρατηρεί ότι στην ιδεατή περιοχή έχουμε στη διάθεσή μας μια λογική εύχρηστη και χρήσιμη, την οποία δεν μπορούμε να αλλάξουμε κατά την αναγωγή στην πραγματική περιοχή. Γενικότερα, ως σταθερότητα των κανόνων μπορούμε να εννοήσουμε τη διατήρηση του μαθηματικού και σημασιολογικού κλίματος που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά, δηλαδή τη ρεαλιστική οντολογία και την κλασική σημασιολογία (αλήθεια και νόημα).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε ήδη λόγος για μια μορφή αναλογίας που χρησιμοποιεί ο Hilbert και αφορά το καθεστώς (status) του απείρου στη φύση και στα μαθηματικά. Τώρα, θα διαπιστώσουμε ότι χρησιμοποιεί μια ακόμα μορφή αναλογίας στα μαθηματικά πλαίσια, και

αναφορικά με τα ιδεατά στοιχεία. Τα ιδεατά στοιχεία που ενδιαφέρουν εδώ είναι οι λογικοί κανόνες:

Κατ' επέκταση, η αλήθεια και~ το νόημα που αυτοί επάγουν — οι σημασιολογικές δηλαδή απαιτήσεις σχετικά με τη λειτουργία των ιδεατών στοιχείων. Ο Hilbert χρησιμοποιεί διάφορες παραδειγματικές περιπτώσεις από την περιοχή των κλασικών μαθηματικών για να κάνει σαφές το είδος της αναλογίας που τον ενδιαφέρει. Η πλέον κλασική περίπτωση είναι οι φανταστικοί αριθμοί οι οποίοι εισάγονται ως ιδεατά στοιχεία των πραγματικών αριθμών. Στα μαθηματικά παραδείγματα μια διαμορφωμένη θεωρία για να ξεπεράσει κάποια προβλήματα που εμφανίζονται στο εσωτερικό της, να επιτύχει, λ.χ., λύσεις της εξίσωσης $\chi^2 + 1=0$, να μιλήσει για σημεία τομής παραλλήλων ευθειών στην Ευκλείδεια γεωμετρία, παραγοντοποίηση στους αριθμητικούς δακτυλίους κ.λπ., προτείνει την εισαγωγή νέων, ιδεατών στοιχείων ενώ ταυτόχρονα διατηρεί τους νόμους που διέπουν τη συμπεριφορά των παλαιών στοιχείων. Η νοηματοδότηση των ιδεατών στοιχείων, π.χ. των φανταστικών αριθμών, επιτυγχάνεται μέσω των νόμων που ήδη λειτουργούν στην περιορισμένη περιοχή. Η συμπεριφορά έτσι των ιδεατών στοιχείων (των φανταστικών αριθμών, λ.χ.) έχει νόημα μέσω της αναγωγής τους σε ζεύγη πραγματικών αριθμών. Η νοηματοδότηση των τύπων και των σχημάτων που περιέχουν τα ιδεατά στοιχεία γίνεται μέσω της σταθερότητας των κανόνων—των παλαιών κανόνων— δεδομένου ότι απαιτούμε να είναι οι ίδιοι κανόνες που ισχύουν για τα πραγματικά και ιδεατά στοιχεία. Επιπλέον, η νοηματοδότηση στηρίζεται τελικά στη δυνατότητα αναγωγής του νοήματος των ιδεατών στοιχείων στο αντίστοιχο νόημα και στη διαδικασία σηματοδότησης των πραγματικών στοιχείων.

Στην περίπτωση του προγράμματος Hilbert, και αναφορικά με τους νόμους της λογικής και τη σημασιολογία, η κατάσταση φαινομενικά

μόνο είναι η ίδια. Ο Hilbert δηλαδή προτείνει να επεκτείνουμε την περιορισμένη περιοχή προσθέτοντας ιδεατά στοιχεία «για να διατηρήσουμε τους απλούς τυπικούς κανόνες της αριστοτελικής λογικής». Και τούτο επειδή. όπως ο ίδιος παραδέχεται, «αν μείνουμε στο πλαίσιο των περατοκρατικών προτάσεων έχουμε πολύπλοκους λογικούς κανόνες". Έτσι, η απλότητα των λογικών κανόνων επιβάλλεται στην περιορισμένη περιοχή, στην οποία όμως ουσιαστικά λειτουργούν μη Αριστοτελικοί λογικοί κανόνες (Πιθανώς, δεν ισχύει η αρχή των δύο σθενών). Στην περίπτωση του περατοκρατισμού του Hilbert, απαιτείται να λειτουργήσει η ευρύτερη λογική και στην περιορισμένη περιοχή. Θα νόμιζε κανείς συνεπώς, ότι αυτό που ενδιαφέρει είναι να αναδειχτεί μια «περατοκρατική» λογική στην περιορισμένη περιοχή η οποία, μεταξύ άλλων, θα περιλάμβανε την περιορισμένη ισχύ της αρχής των δύο σθενών. Η «περατοκρατική» αυτή λογική θα προέκυπτε στο εσωτερικό της περιορισμένης περιοχής, και θα αντανακλούσε την λογική αυτής της περιοχής: δεν θα μπορούσε να είναι μια λογική που θα επιβαλλόταν εκ των έξω πάνω στην περιορισμένη περιοχή. Συνεπώς, δεν θα μπορούσε να είναι η λογική που δεχόμαστε στην ευρύτερη περιοχή.

Η αρχικά εμφανιζόμενη ως αναλογία μεταξύ της περιορισμένης, πραγματικής περιοχής και της ιδεατής περιοχής κρύβει μια αναλογία στη δυνατότητα επέκτασης της περιορισμένης μαθηματικής περιοχής στη ιδεώδη περιοχή. Αυτή η δυσαναλογία επιτείνεται, όταν παρατηρήσουμε ότι στη περιορισμένη μαθηματική περίπτωση, τα ιδεατά στοιχεία μετά από την προσάρτησή τους αποκτούν συνεπή συμπεριφορά, συνεπώς αποκτούν λειτουργικό νόημα στο πλαίσιο των κανόνων αυτής της περιοχής. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για τα ιδεατά στοιχεία της λογικής και της σημασιολογίας μετά από την προσάρτησή τους στην περιορισμένη περιοχή της λογικής και της σημασιολογίας.